UNE REMARQUE SUR LES HOMÉOMORPHISMES UNIFORMES

Fouad Chaatit

Received April 4, 2003; revised June 4, 2003

Abstract. Let $T : B(\ell_q) \to B(X)$, where X is a Banach space with a 1-unconditional basis p_1-concave with constant 1, and $q > p_1 = p + \epsilon$, a uniform homeomorphism with modulus of continuity δ_T. It is shown that for every real number γ satisfying the inequality $0 \leq \gamma < \frac{q-p}{qp}$, there exist $K > 0$ and a sequence ϵ_n) with $(\epsilon_n) \to 0$ such that $\delta_T \delta_{T^{-1}}(\epsilon_n) \geq K\epsilon_n |log\epsilon_n|^\gamma$ for all ϵ_n.

Soit $T : B(\ell_q) \to B(X)$, ou X est un espace de Banach a base 1-inconditionnelle p_1-concave avec constante 1, et $q > p_1 = p + \epsilon$, un homeomorphisme uniforme avec module de continuite δ_T. Pour tout γ nombre reel tel que $0 \leq \gamma < \frac{q-p}{qp}$, il existe $K > 0$ et une suite ϵ_n) avec $(\epsilon_n) \to 0$ telles que $\delta_T \delta_{T^{-1}}(\epsilon_n) \geq K\epsilon_n |log\epsilon_n|^\gamma$ pour tout ϵ_n. [1] [2]

La théorie non lineaire des espaces de Banach prend naissance à l'étude des fonctions uniformèment continues. Cette théorie s'est developpé lentement pendant les dernières années, mais elle possède un aspect, qui date en fait des travaux pionniers de Mazur, qui a suscité recemment beaucoup d'intérêt. Il s'agit de la classification des espaces de Banach par l'existence des homeomorphismes uniformes entre les boules unités de deux espaces donnés. Dans ce cas on appelera les espaces de Banach appartenant à la même classe des espaces localement uniformement homéomorphes. Avant de poursuivre, notons que nous utiliserons par la suite de manière déliberée les notations standards en théorie des espaces de Banach telles qu'on peut les trouver par exemple dans [B.L]. Ainsi, $B\,X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ representera la boule unité de l'espace de Banach X et $S(X) = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ la sphère unité de X. L'espace ℓ_p (respectivement ℓ_∞) represente l'espace des suites reelles de puissance $p$iéme sommables (respectivement l'espace des suites bornées), alors que l'espace c_0 est celui des suites reelles tendant vers 0. Etant donné un treillis de Banach X, la p-convexification $X^{(p)}$ de X est donnée par

$$X^{(p)} = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R} : |f|^p \in X\}$$

avec

$$|||f||| = \||f|^p\|^{\frac{1}{p}}.$$

On voit donc que $\ell_p := \{f : \mathbf{N} \to \mathbf{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|^p < \infty\}$ que la p-convexification de ℓ_1, alors que L_p est la p-convexification de $L_1 = \{[0,1] \longrightarrow \mathbf{R} : \int_0^1 |f(x)|^p dx < \infty\}$. ℓ_∞^n n'est autre que l'espace fini-dimensionnel $\mathbf{R}^n$ muni de la norme sup.

Dans les années 20, Mazur avait construit une fonction non lineaire

$$\varphi_{p,q} : L_p(\mu) \longrightarrow L_q(\mu)$$

pour $1 \leq p, q < \infty$, donnée par

$$\varphi_{p,q}(f) = |f|^{p/q} \mathrm{sgn}(f)$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* 46B03, 46B25.
Key words and phrases. homeomorphismes uniformes.

[1] AMS Subject Classification: 46B25

[2] School of Sciences and Engineering, AlAkhawayn University in Ifrane

qui est un homéomorphisme local. En conséquence, les boules unité de L_p et ℓ_p sont uniformèment homéomorphes à la boule unité de l'espace de Hilbert ℓ_2.

Il faut remarquer ici que L_1 et ℓ_1 ne sont pas homéomorphes [B] comme ne le sont pas les espaces L_p et L_q [E2). La caractérisation des espaces de Banach dont la boule unité est uniformèment homéomorphe à celle de ℓ_2 reste ouverte.

Enflo a montré que la boule unité de tout espace de Banach contenant les espaces ℓ_∞^n uniformément ne peut pas se plonger uniformément dans un espace de Hilbert [E1].

Raynaud [R] a généralisé cette situation et a montré que tout espace de Banach dont la boule unité est uniformément plongeable dans un espace de Hilbert (ou tout espace superstable) satisfait la proprieté suivante:

Pour tout Y qui est finiment représentable dans X, et pour toute suite basique $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Y$, si $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ est equivalente à toutes ses sous-suites alors $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ est inconditionelle.

Tout espace de Banach superstable possède cette proprieté, mais il existe un espace de Banach uniformément convexe qui ne la satisfait pas.

Chaatit [C] a montré que si X est un treillis de Banach separable alors: il existe un homéomorphisme uniforme préservant les supports $T : B\ X \longrightarrow B\ \ell_2$ si et seulement si $\ell_\infty^n \not\subset X$ uniformément, généralisant ainsi un resultat d'Odell et Schlumprecht [OS] qui porte sur les espaces de Banach à base inconditionelle. En fait dans [C] on peut trouver des résultats quantitatifs quant au module d'uniforme homéomorphisme $\delta(X)$ entre les boules unites de treillis de Banach q-concaves par exemple.

Dans le même ordre d'idées, il découle des résultats de [C] par exemple que les boules unités de L_p et L_q sont uniforméments homéomorphes pour $p, q \geq 1$.

Dans le but d'obtenir plus d'informations quantitatives sur les homéomorphismes uniformes entre les espaces L_p et ℓ_p Lövblom avait étudié le module de continuité, $\delta_T(\epsilon)$ defini par:

$$\delta_T(\epsilon) = sup\{||T(x_1) - T(x_2)|| : ||x_1 - x_2|| \leq \epsilon\}$$

Dans [Lo1)] il est montré que pour $p = 1$ il existe une suite (ϵ_n) avec $(\epsilon_n) \to 0$ et une constante $K > 0$ telle que

$$(*)\delta_T \delta_{T^{-1}}(\epsilon_n) \geq K\epsilon_n |log\epsilon_n|$$

pour tout ϵ_n. Ensuite un résultat similaire est obtenu dans [Lo2] pour le cas $1 \leq p < 2$. Plus précisément, il est montré que si $T : B\ (L_p) \to B\ (\ell_p), 1 \leq p < 2$ est un homéomorphisme uniforme et $0 \leq \gamma < \frac{2-p}{2p}$, alors il existe $K > 0$ et une suite ϵ_n avec $(\epsilon_n) \to 0$ telles que

$$(**)\delta_T \delta_{T^{-1}}(\epsilon_n) \geq K\epsilon_n |log\epsilon_n|^{\gamma}$$

pour tout ϵ_n. Dans le présent papier nous annoncons les résultats suivants:

Théorème 1 *Soit* $T : B\ (L_q) \to B\ (\ell_p), 2 \leq p < q < \infty$ *un homéomorphisme uniforme avec module de continuité* δ_T. *Pour tout* γ *nombre réél tel que* $0 \leq \gamma < \frac{q-p}{qp}$, *il existe* $K > 0$ *et une suite* (ϵ_n) *avec* $(\epsilon_n) \to 0$ *telles que* $\delta_T \delta_{T^{-1}}(\epsilon_n) \geq K\epsilon_n |log\epsilon_n|^{\gamma}$ *pour tout* ϵ_n.

Proof: L'idee principale de la démonstration est comme dans [Lo2)] de construire un ensemble non compact de points dans L_p qui y soient bien séparés et qui soient "presque des médianes metriques". Ceci va se faire dans ℓ_2 puisque ce dernier se plonge isométriquement dans L_p. Pour $x = \sum x_i e_i, y = \sum y_i e_i$ dans la boule $B\ (\ell_2)$ qui soient supportés par un nombre fini de coordonnées, pour tout i à l'exterieur de l'union des supports de x et y la "presque mediane metrique" de x et y

est définie par

$$z_i = \frac{x+y}{2} + ||x-y|| log||x-y||^{-\alpha} e_i,$$

ici α est un nombre réél fixe satisfaisant

$$\frac{p}{q-p}\gamma < \alpha < \frac{1}{p} - \gamma.$$

Notons au passage que

$$z_i - x_i = \frac{y-x}{2} + ||x-y|| log||x-y||^{-\alpha} e_i,$$

et donc

$$||z_i - x|| = ||z_i - y|| = \frac{||x-y||}{2}(1 + |log||x-y|||^{-\alpha}).$$

La demonstration est presque la meme que celle de [LO2] sauf pour le choix de α qui est encore possible puisque $0 \leq \gamma < \frac{q-p}{qp}$. ∎

Ensuite nous observons que la même estimation est valable pour tout homéomorphisme $T : B\ (L_q) \to B\ (L_p)$; tout simplement parce que $B\ (\ell_q) \subset B\ (L_q)$ et que si (h_n) est le systeme de Haar alors $[L_p, (h_n)]$ est un espace de cotype p avec $p > 2$ et donc est p_1-concave pour tout $p_1 > p$. Cette idéé de concavite apparait déjâ dans la démonstration de Lövblom sans être explicitement remarquée. Ceci montre clairement que notre travail generalise celui de Lövblom puisque cela permet d'attraper le cas de tout homéomorphisme uniforme entre $B\ (\ell_q)$ et $B\ (\ell_p)$ pour $q > p$, alors que le cadre de Lövblom est un homéomorphisme entre $B\ (\ell_2)$ et $B\ (\ell_p)$ où $2 > p$. Ceci nous amène au résultat plus géneral suivant:

Théorème 2 *Soit* $T : B\ (\ell_q) \to B\ (X)$, *ou* X *est un espace de Banach a base 1-inconditionnelle* p_1*-concave avec constante 1, et* $q > p_1 = p + \epsilon$, *un homeomorphisme uniforme avec module de continuite* δ_T. *Pour tout* γ *nombre reel tel que* $0 \leq \gamma < \frac{q-p}{qp}$, *il existe* $K > 0$ *et une suite* $\epsilon_n)$ *avec* $(\epsilon_n) \to 0$ *telles que* $\delta_T \delta_{T^{-1}}(\epsilon_n) \geq K\epsilon_n |log\epsilon_n|^{\gamma}$ *pour tout* ϵ_n.

Par ailleurs, si nous revenons a la question de la caracterisation localement uniformément uniforme a part les treillis, il est maintenant connu qu'il existe des espaces de Banach dont les boules unités sont uniformément homéomorphes à la boule unité $B\ \ell_2$. Par exemple, Kalton a observé qu'en utilisant la méthode de decomposition de Pelczynski l'on peut obtenir que si Y est un sous-espace de dimension infinie d'un treillis superreflexif X alors $B\ Y$ est uniformément homéomorphe à $B\ \ell_2$. Une autre classe est la classe C_p des espaces d'opérateurs de Schatten sur ℓ_2 pour $1 < p < \infty$. On peut remarquer ici que si $p \neq 2$, les espaces C_p ne se plongent pas linéairement dans aucun treillis superreflexif.

Nous terminons donc par la formulation de quelques questions qui nous paraissent intéressantes:

1) Supposons que X est superstable. Est-il vrai que la boule unité de X et celle de ℓ_2 sont uniformément homéomorphes?

2) Supposons que la sphère de X et celle de ℓ_2 sont uniformément homéomorphes et X n'est pas distortable; cela implique-t-il que X doit contenir une copie isomorphe de ℓ_2?

3)Soit $X = \bigoplus_{\ell_2} \ell_\infty^n$. Est-il vrai ou pas que X est localement uniformément homéomorphe a c_0?

Notons que la réponse à la version globale de la question 3) est non; i.e. X n'est pas uniformément homéomorphe à c_0 autrement étant donné que l'espace $l_2 \subset \bigoplus_{\ell_2} \ell_\infty^n$ de facon complémentée, il se plongerait uniformément dans c_0 avec image uniformément complémentée, donc serait un espace $\mathcal{L}_\infty$ d'aprés le théorème 4.9 de [HM] . Pour plus details sur ces questions nous renvoyons le lecteur à l'excellent survey de Lindenstrauss [L]. Toutefois, comme il est noté dans ce survey, l'hypothèse du treillis ne peut pas être simplement omise compte tenu d'un résultat de Raynaud [R]. Un autre excellent livre sur ces questions et qui est plus récent est celui de Benyamini et Lindenstrauss [B.L].

References

[B] Y. Benyamini, *The uniform classification of Banach spaces* , Longhorn Notes 1984-85. The University of Texas at Austin.

[B.L] Y. Benyamini, J. Lindenstrauss *Geometric Nonlinear Functional Analysis* Colloquium Publications, American Math. Soc. Vol. 48

[C] F.Chaatit, *On uniform homeomorphisms of the unit spheres of certain Banach spaces.* Pacific J. of Math. **168**, n.1, 1995.

[E1] P.Enflo, *On a problem of Smirnov.* Ark. Mat. **8** (1969) 107-109.

[E2] P.Enflo, *On the Non Existence of Uniform Homeomorphisms between L_p-spaces.* Ark. Mat. 8 (1969), 103-105.

[HM] S.Heinrich, P.Mankiewicz *Applications of Ultrapowers to the Uniform and Lipschitz Classification of Banach Spaces.* Studia Math. 73 (1982), 225-262

[OS] E. Odell, T. Schlumprecht. *The distortion problem.* Acta Math. **173** (1994) 259-281.

[L] J. Lindenstrauss. *Uniform embeddings, homeomorphisms and quotient maps between Banach spaces.* Topology and applications **85** (1998) 265-279.

[LO1] G.M. Lövblom, *Uniform Homeomorphisms Between Unit Balls in L_p-Spaces* Math. Scand.(62) (1988), 294-302

[LO2] G.M. Lövblom, *Uniform Homeomorphisms Between the Unit Balls in L_p and ℓ_p* Proc. Amer. Math. Soc. Vol 123 (1995), n0.2, 405-409.

[R] Y. Raynaud. *Espaces de Banach superstables, distances et homéomorphismes uniformes.* Israel J. math. (1983) 33-52.

School of Science & Engineering
AlAkhawayn University in Ifrane
BP1836
Ifrane 53000

E-mail address : F.Chaatit@alakhawayn.ma