



一般社団法人

# 国際数理科学協会会報

No.80/ 2012.3

編集委員：藤井淳一(委員長)

## 目次

- |              |           |
|--------------|-----------|
| * 年会         | * 正会員申込用紙 |
| * ヤボニカ投稿時の注意 | * 会員募集    |
| * 寄稿         |           |

### \* 年会

日程：平成24年8月25日(土)

場所：大阪府立大学 中百舌鳥キャンパス A13棟(中百舌鳥門すぐの建物)

大阪府堺市中区学園町1-1

アクセス：南海「白鷺駅」下車 徒歩7分 南海「中百舌鳥駅」、地下鉄御堂筋線「なかもず駅(5号出口)」下車 徒歩13分 <http://www.osakafu-u.ac.jp/access/index.html>

会場担当者：大阪府立大 北條会員

### \* ヤボニカ投稿時の注意

論文の作成では<http://www.jams.or.jp/notice/oldnotice/new-style-files/latex2e.html> を参考のうえお願い致します。そこで書かれているstyle fileの使用をお願い致します。これを無視して進みますと、たとえ掲載してよいということになっても、header とかpage 数とかが正常に記入するのに、時間を取られ待ち時間零で掲載できるというこの論文の売りが反映されないことがあります。ご注意をお願い致します。

また、前回にも書きましたが、従来と少し異なり次の3点を協会宛メールでお送り下さい。

- (1) 原稿の source file (tex file)
- (2) 上記の pdf file
- (3) Submission form の3点です。

これが揃わないために、つぎのstepへの無駄な時間があったりします。皆様方のご協力により、online版の掲載が幾分でもはやくなるのではと思っています。ご協力をお願いいたします。なお、editorに送付は従来通りです。

## 自己回帰モデルにおける情報量損失の抽出ファクターについて

大阪大学大学院基礎工学研究科 熊谷悦生

### 1 はじめに

フィナンシャル時系列において、株価の推移をチャートとして調べる場合、調べたい内容に応じて日次データ、週次データ、月次データを臨機応変に取り扱うことが多い。これは、実務的に我々が短期間の変化を調べるには日次データを、長期間の変化を調べるには月次データを、その中間期間を調べるには週次データを使う方が自然であり調べやすいと考えているからであろう。

フィナンシャルデータに対する連続型モデルにおいても、離散的な観測値の観測幅として  $h_n$  を考え、正則条件でデータ数  $n$  が大きくなると  $h_n$  は 0 に収束すると仮定することが多い ([1],[7], 及び [8])。フィナンシャルデータの統計モデルにおいて通常、観測幅  $h_n$  の条件として次の三つを考える：

- (i)  $nh_n = T$  は固定で  $h_n \rightarrow 0$  (高頻度データ)
- (ii)  $h_n = \Delta$  は固定で  $nh_n = n\Delta = T \rightarrow \infty$  (時系列データ)
- (iii)  $h_n \rightarrow 0$  かつ  $nh_n = T \rightarrow \infty$  (高頻度データかつ長期間データ)

我々が時系列データを考えるときには、上の三つのうちの二番目である  $h_n$  を固定して考えることになる。1年間を 1 とすると、日次、週次、月次データに対して、区間幅である  $h_n$  はそれぞれ  $h_n = 1/245, 1/52, 1/12$  と設定することになるのであるが、これは三種類のデータが時間間隔だけに依存しており本質的には均一であることを暗黙のうちに前提としていることに注意が必要である。

この暗黙の前提条件は、理論的側面や計算機的側面から合理的でありかつ有益なものである。それは理論上は統一されたデータ間隔の取扱いをすることが可能になるからである。しかし、ここで一つの疑問が生じる：ある時系列モデルにおいてこれらの三種類のデータに関するパラメータもしくは情報量がデータの個数に単純に比例するのだろうか、という疑問である。この疑問は、株価の短期間や長期間の変動が知りたい時に、それぞれ株価の日次データ、月次データを使うほうが良い、という使用法に対する一つのアンチテーゼとして得られたものである。[3] は、フィナンシャル収益がデータの頻度に応じてデータの裾が重いか軽いかが決まることを示したが、我々の調べたいこととは焦点が少しずれている。

我々がその三種類のデータから任意にどれか一つを選ぶものと仮定すると、この選択が、日次データに基づいたモデルの下で異なる種類のデータを解析することへの合理的根拠を持っているか否か、即ち、抽出されたデータが、データ数の違いを除いて、全体のデータに対する情報量として同じ構造を保持しているか否か、は重要で実践的な問題となるだろう。

ここで、抽出されたデータと欠測値データとの違いは何か、即ち、抽出されたデータに対する我々のアプローチは MNAR のような欠測フレームワークに似ているのではないかと考えるかも知れない。[11] で比較されているように、欠測データには三種類あって、完全ランダム欠測 (MCAR)、ランダム欠測 (MAR)、ランダムでない欠測 (MNAR) となる。[4] はラン

ダム欠測があるときの頻度論的推測に基づいた尤度関数を調べている。しかし、これらは統計的にみて我々のアプローチとは異なるのである、何故なら欠測値データは全体のデータの中に欠測部分が必ず存在するデータ構造に基づいているが、我々のアプローチは日次株価のような完全に全部揃ったデータに基づいて、あるルールでそれらからデータを抽出するアプローチだからである。

この寄稿では、時系列モデルにおける非常にシンプルな1次の自己回帰モデル  $AR(1)$  において、この抽出ファクターに関する正確なそして漸近的な情報量損失を求めることにする。時系列解析に関しては [2], [10] が詳しく、[9] は特に不均一分散モデルである GARCH モデルに関するものである。

## 2 $AR(1)$ モデルにおける抽出データの正確な情報量

まず定常自己回帰過程の  $AR(1)$  モデルにおける全体のデータが持つ正確な情報量は次のようになっている。

定理 1 時系列モデルの  $AR(1)$  を  $X_t = \phi X_{t-1} + Z_t$  とする。但し、誤差項は  $Z_t \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0, \sigma^2)$  で、初期値は  $X_0 = x_0$ 、係数は  $|\phi| < 1$  である。このモデルにおけるパラメータを  $\theta = (\phi, \sigma^2)$  とすると、パラメータ  $\theta$  に関する  $\{X_1, \dots, X_n\}$  における正確な Fisher 情報量  $I_n(\theta)$  は

$$I_n(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{n}{1-\phi^2} + \frac{1}{\sigma^2} \left( x_0^2 - \frac{\sigma^2}{1-\phi^2} \right) \frac{1-\phi^{2n}}{1-\phi^2} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2\sigma^4} \end{pmatrix} \quad (1)$$

となり、この漸近的信息量は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} I_n(\theta) = \begin{pmatrix} (1-\phi^2)^{-1} & 0 \\ 0 & (2\sigma^4)^{-1} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

となる。

ここで、上の  $AR(1)$  モデルと同じ仮定条件で得た元データ  $\{x_1, \dots, x_n\}$  から抽出したデータ  $\{x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_m}\}$  ( $m < n$ ) を考え、抽出されたデータに関する正確な情報量を求めることにする。実際、データの抽出方法としては二通り、即ち、ランダムに抽出する方法と事前に設定した抽出方法があるが、ここでは事前に設定した抽出方法による抽出データのみを扱うことにする。

定常  $AR(1)$  モデルにおいては

$$X_t = \phi X_{t-1} + Z_t = \phi^t x_0 + \sum_{j=1}^t \phi^{t-j} Z_j, \quad (t = 1, \dots, n)$$

が成り立つので、抽出されたデータでは、 $t_k > t_{k-1}$  に対して

$$X_{t_k} = \phi^{t_k} x_0 + \sum_{j=1}^{t_k} \phi^{t_k-j} Z_j, \quad X_{t_{k-1}} = \phi^{t_{k-1}} x_0 + \sum_{j=1}^{t_{k-1}} \phi^{t_{k-1}-j} Z_j$$

となり、隣接する抽出されたデータにおいて

$$X_{t_k} = \phi^{t_k - t_{k-1}} X_{t_{k-1}} + \sum_{j=t_{k-1}+1}^{t_k} \phi^{t_k-j} Z_j \quad (3)$$

が成り立つ。

利便性のために  $s_k = t_k - t_{k-1}$  とおく。上の式 (3) がそれが変動する間隔を持った抽出時間  $\{t_k\}$  に基づいた  $AR(1)$  のようなモデルであることが分かる。もし間隔  $s_k$  がある定数  $s (> 0)$  であるとする、これは元の時間  $\{t\}$  に基づいた  $ARMA(s, s-1)$  モデルとなる。株価でいえば、日次データから抽出された週次データや月次データがあり、我々はそれらの抽出されたデータに対して、抽出された関係に一切拘ることなくそれぞれに  $AR$  モデルや  $ARMA$  モデルを適用しがちであるので、先の抽出された式 (3) を  $AR(1)$  のようなモデルと仮定しても差し支えないであろう。この仮定の下で、抽出されたデータのモデルを  $AR(1)$  モデルに近似することで、正確な情報量損失を考えることにする。この条件付き期待値と分散は

$$E(X_{t_k} | X_{t_{k-1}}) = \phi^{s_k} X_{t_{k-1}}, \quad V(X_{t_k} | X_{t_{k-1}}) = \sigma^2 \frac{1 - \phi^{2s_k}}{1 - \phi^2} \quad (4)$$

であるから、定理 1 のように、この条件付き確率変数が正規分布に従っていると仮定すると、条件付き密度関数は

$$f(x_{t_k} | x_{t_{k-1}}; \theta) = \frac{\sqrt{1 - \phi^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2(1 - \phi^{2s_k})}} \exp \left\{ -\frac{(x_{t_k} - \phi^{s_k} x_{t_{k-1}})^2 (1 - \phi^2)}{2\sigma^2(1 - \phi^{2s_k})} \right\}$$

と定義できるので、同時密度関数を

$$f(x_{t_m}, x_{t_{m-1}}, \dots, x_{t_1}, x_0; \theta) = \prod_{k=1}^m f(x_{t_k} | x_{t_{k-1}}; \theta)$$

とすれば、対数尤度関数  $\ell_{m|n}(\theta)$  は

$$\begin{aligned} \ell_{m|n}(\theta) &= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \log \left( 2\pi\sigma^2 \frac{1 - \phi^{2s_k}}{1 - \phi^2} \right) - \sum_{k=1}^m \frac{(x_{t_k} - \phi^{s_k} x_{t_{k-1}})^2 (1 - \phi^2)}{2\sigma^2(1 - \phi^{2s_k})} \end{aligned} \quad (5)$$

となる。これらの仮定条件により、抽出されたデータの尤度関数は、 $AR(1)$  モデルに近似される。全データに対する対数尤度関数  $\ell_n(\theta)$  は

$$\ell_n(\theta) = \prod_{j=1}^n f(x_j | x_{j-1}; \theta) = -\frac{n}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \sum_{j=1}^n \frac{(x_j - \phi x_{j-1})^2}{2\sigma^2}$$

であることに注意。

**定理 2**  $AR(1)$  モデルにおける全データから抽出された観測値 (3) に対して、正確な Fisher 情報量行列は

$$I_{m|n}(\theta) = \begin{pmatrix} I_{\phi, \phi} & I_{\phi, \sigma^2} \\ I_{\sigma^2, \phi} & I_{\sigma^2, \sigma^2} \end{pmatrix} \quad (6)$$

である。但し、ここでの4つの成分は

$$I_{\phi,\phi} = \frac{2m\phi^2}{(1-\phi^2)^2} + \sum_{k=1}^m \frac{\nu(\phi, s_k)}{(1-\phi^2)(1-\phi^{2s_k})^2} + \sum_{k=1}^m \frac{s_k^2 \phi^{2s_k-2} (1-\phi^2)}{\sigma^2 (1-\phi^{2s_k})} \left( x_0^2 - \frac{\sigma^2}{1-\phi^2} \right) \phi^{2t_{k-1}},$$

$$I_{\sigma^2,\phi} = \frac{m\phi}{\sigma^2(1-\phi^2)} - \sum_{k=1}^m \frac{s_k \phi^{2s_k-1}}{\sigma^2(1-\phi^{2s_k})}, \quad I_{\sigma^2,\sigma^2} = \frac{m}{2\sigma^4}$$

であり、 $I_{\phi,\phi}$  の分子にある  $\nu(\phi, s_k)$  は

$$\nu(\phi, s_k) = s_k^2 \phi^{2s_k-2} - s_k(s_k+4)\phi^{2s_k} + s_k^2 \phi^{4s_k-2} - s_k(s_k-4)\phi^{4s_k}$$

である。

証明は略すが、先ほどの条件付き期待値と分散 (4) を使って

$$E(X_{t_{k-1}}) = E(X_{t_{k-1}} | x_0) = \phi^{t_{k-1}} x_0,$$

$$E(X_{t_{k-1}}^2) = E(X_{t_{k-1}}^2 | x_0) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2} + \left( x_0^2 - \frac{\sigma^2}{1-\phi^2} \right) \phi^{2t_{k-1}}$$

を求めることによって得られる。

ここで  $\nu(\phi, s_k)$  を抽出ファクターと呼ぶことにする。何故なら、 $\{s_k = 1 : k = 1, 2, \dots, n\}$  の場合  $I_{\phi,\phi}$  の第1項と第2項の和は

$$\frac{2n\phi^2}{(1-\phi^2)^2} + \sum_{k=1}^n \frac{\nu(\phi, 1)}{(1-\phi^2)(1-\phi^2)^2} = \frac{n}{1-\phi^2},$$

となるが、これは全情報量  $I_n(\theta)$  における (1,1)-成分の主要項に一致するからである。

系 1 抽出間隔  $s_k = x_{t_k} - x_{t_{k-1}}$  を定数の正数値  $s$  と仮定すると、 $n = ms$  となり正確な情報量は

$$I_{m|n}(\theta) = \begin{pmatrix} I_{\phi,\phi} & I_{\phi,\sigma^2} \\ I_{\sigma^2,\phi} & I_{\sigma^2,\sigma^2} \end{pmatrix}$$

となり、4つの成分はそれぞれ

$$I_{\phi,\phi} = \frac{2m\phi^2}{(1-\phi^2)^2} + \frac{m\nu(\phi, s)}{(1-\phi^2)(1-\phi^{2s})^2} + \frac{s^2 \phi^{2s-2} (1-\phi^2)}{\sigma^2 (1-\phi^{2s})} \left( x_0^2 - \frac{\sigma^2}{1-\phi^2} \right) \left( \frac{1-\phi^{2n}}{1-\phi^{2s}} \right),$$

$$I_{\sigma^2,\phi} = \frac{m}{\sigma^2} \left( \frac{\phi}{1-\phi^2} - \frac{s\phi^{2s-1}}{1-\phi^{2s}} \right), \quad I_{\sigma^2,\sigma^2} = \frac{m}{2\sigma^4}$$

であり、抽出ファクターは

$$\nu(\phi, s) = s^2 \phi^{2s-2} - s(s+4)\phi^{2s} + s^2 \phi^{4s-2} - s(s-4)\phi^{4s} \quad (7)$$

となる。

系 1 によって,  $I_{\phi, \phi}$  の抽出ファクター  $\nu(\phi, s)$  を  $s$  を変えて求めてみると次のようになる :

$$\begin{aligned}\nu(\phi, 1) &= 1 - 4\phi^2 + 3\phi^4, \\ \nu(\phi, 2) &= 4\phi^2 - 12\phi^4 + 4\phi^6 + 4\phi^8, \\ \nu(\phi, 5) &= 25\phi^8 - 45\phi^{10} + 25\phi^{18} - 5\phi^{20}, \\ \nu(\phi, 20) &= 400\phi^{38} - 480\phi^{40} + 400\phi^{78} - 320\phi^{80}.\end{aligned}$$

$\nu(\phi, s) = 0$  の実数解としては, 少なくとも  $s = \pm 1$  であることは簡単に分かる. 定常条件である  $|\phi| < 1$  の範囲で  $\nu(\phi, s)$  ( $s = 1, 2, 5, 20$ ) のグラフは以下ようになる :

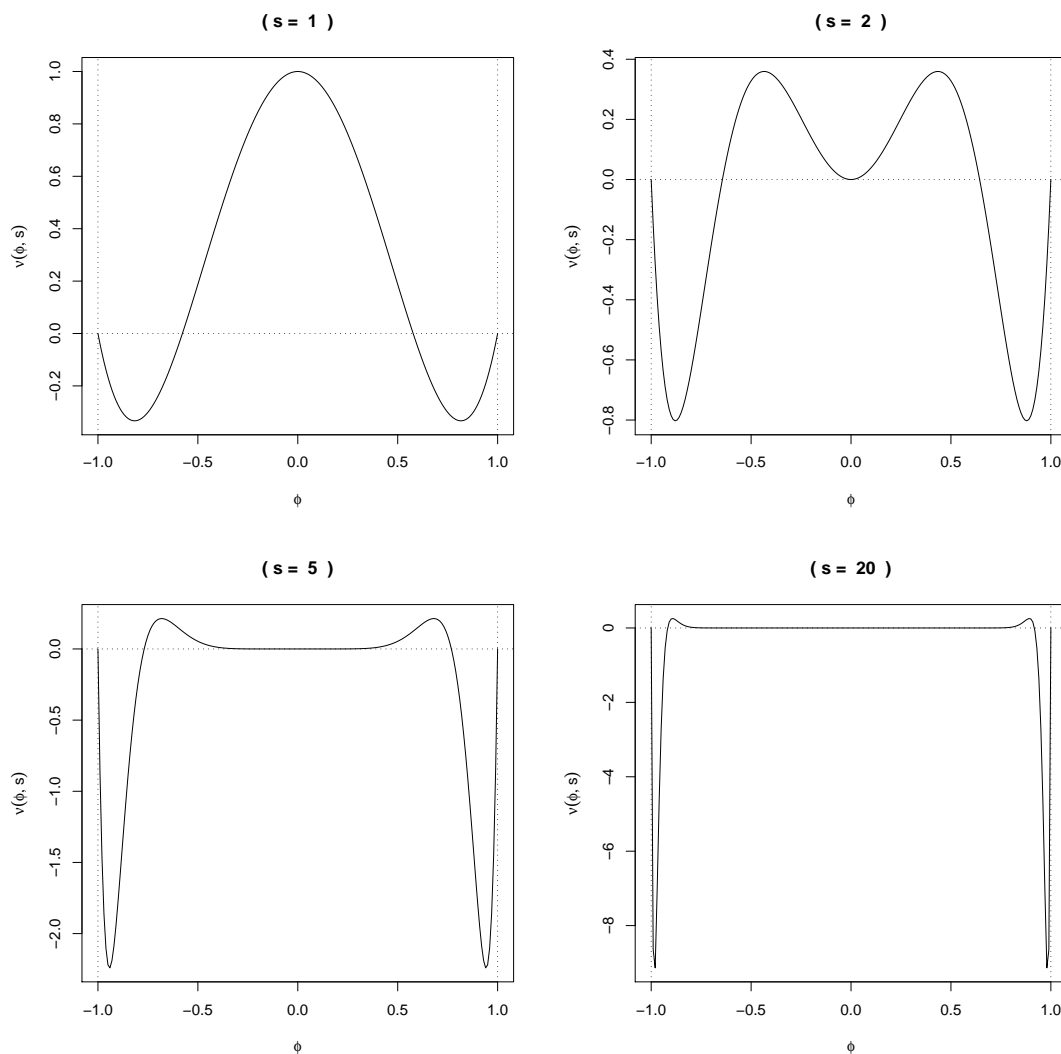


図 1: 領域  $|\phi| < 1$  における  $\nu(\phi, s)$  ( $s = 1, 2, 5, 20$ )

四つの図からは,  $s$  の値が大きくなればなるほど, 領域内で  $\nu(\phi, s)$  がほぼ水平となる領域が拡大していくことが分かる.

### 3 漸近的情報量損失の性質

ここからは、 $s$  は正数で  $n = ms$  であると仮定する。このときの抽出列に対する正確な情報量損失は次の定理で与えられる：

定理 3  $n = ms$  に対して、 $I_n(\theta)$  と  $I_{m|n}(\theta)$  の正確な情報量損失は

$$I_n(\theta) - I_{m|n}(\theta) = \begin{pmatrix} \delta_{n,11} & \delta_{n,12} \\ \delta_{n,21} & \delta_{n,22} \end{pmatrix}$$

である。但し、

$$\begin{aligned} \delta_{n,11} &= \frac{n}{1-\phi^2} \left\{ 1 - \frac{2\phi^2(1-\phi^{2s})^2 + (1-\phi^2)\nu(\phi, s)}{s(1-\phi^2)(1-\phi^{2s})^2} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{\sigma^2} \left( x_0^2 - \frac{\sigma^2}{1-\phi^2} \right) \frac{1-\phi^{2n}}{1-\phi^2} \left\{ 1 - \frac{s^2\phi^{2s-2}(1-\phi^2)^2}{(1-\phi^{2s})^2} \right\}, \\ \delta_{n,12} &= \delta_{n,21} = -\frac{n}{s\sigma^2} \left( \frac{\phi}{1-\phi^2} - \frac{s\phi^{2s-1}}{1-\phi^{2s}} \right), \quad \delta_{n,22} = \frac{n}{2\sigma^4} \left( 1 - \frac{1}{s} \right). \end{aligned}$$

系 2  $n = ms$  に対して、正確な情報量損失  $I_n(\theta) - I_{m|n}(\theta)$  の極限は、次のような間隔  $s$  に依存した漸近的情報量損失となる：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (I_n(\theta) - I_{m|n}(\theta)) = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix}$$

但し、

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{1}{1-\phi^2} \left\{ 1 - \frac{2\phi^2(1-\phi^{2s})^2 + (1-\phi^2)\nu(\phi, s)}{s(1-\phi^2)(1-\phi^{2s})^2} \right\}, \\ \delta_{12} &= \delta_{21} = -\frac{1}{s\sigma^2} \left( \frac{\phi}{1-\phi^2} - \frac{s\phi^{2s-1}}{1-\phi^{2s}} \right), \quad \delta_{22} = \frac{1}{2\sigma^4} \left( 1 - \frac{1}{s} \right). \end{aligned}$$

この漸近情報量損失は、一見最尤推定量に関する漸近 2 次有効性のように思えるが、全体のデータと抽出されたデータに基づく Fisher 情報量の差のみによる損失であることに注意。

系 2 に対して、漸近的情報量損失における要素  $\delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{22}$  の振る舞いをグラフでみていく。

まず、領域  $|\phi| \leq 1$  での  $\delta_{11}$  の  $s = 1, 2, 5, 20$  におけるグラフは以下の通り：

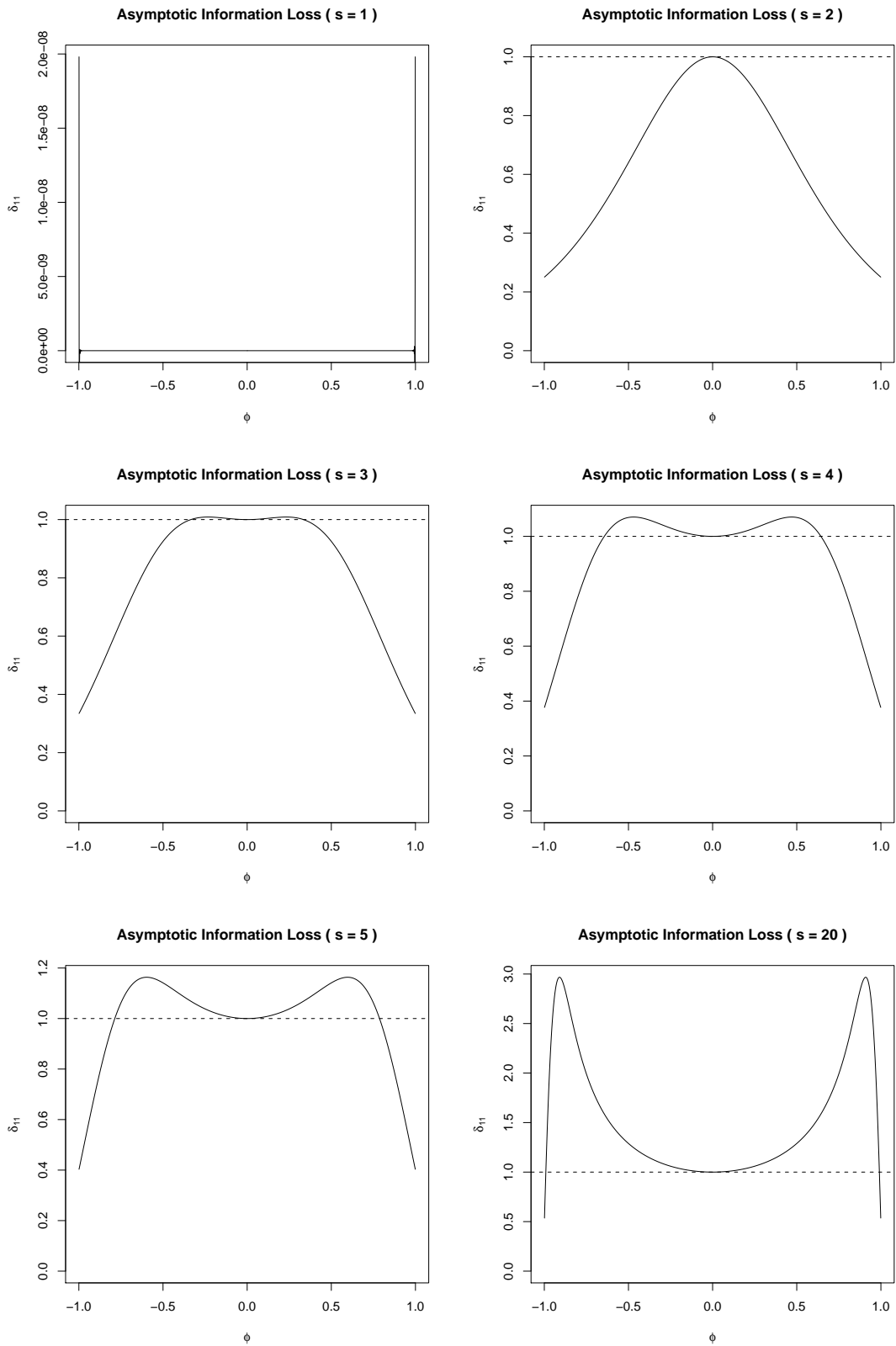


図 2: 領域  $|\phi| \leq 1$  での  $\delta_{11}$  の  $s = 1, 2, 3, 4, 5, 20$



抽出間隔が  $s = 1$  のとき、正確な情報量損失はゼロであることは明らかで、漸近情報量損失は  $\phi = \pm 1$  の近傍を除いてゼロとなる。

抽出間隔が  $s = 2$  のとき、グラフは対称で  $\phi$  が 0 から 1 に近づくにつれて漸近情報量損失は単調に減少することに気付く。しかし、抽出間隔が  $s \geq 3$  のときは、 $s = 2$  のような単調性はなくなり、4 次方程式に似た曲線となり、 $\delta_{12}$  が  $\phi$  に応じて値 1 の辺りで値が増えたり減ったりするのは非常に興味深い現象である。ここでの  $s = 5, 20$  はそれぞれ週次データ、月次データに対応した漸近情報量損失である。

次に、漸近情報量損失における (1,2)-成分を考える：

$$\delta_{12} = -\frac{1}{s\sigma^2} \left( \frac{\phi}{1-\phi^2} - \frac{s\phi^{2s-1}}{1-\phi^{2s}} \right).$$

この  $\delta_{12}$  のグラフを、 $\sigma^2 = 1$  として、領域  $|\phi| \leq 1$  に対して  $s = 1, 2, 5, 20$  の場合を示したのが下図である。

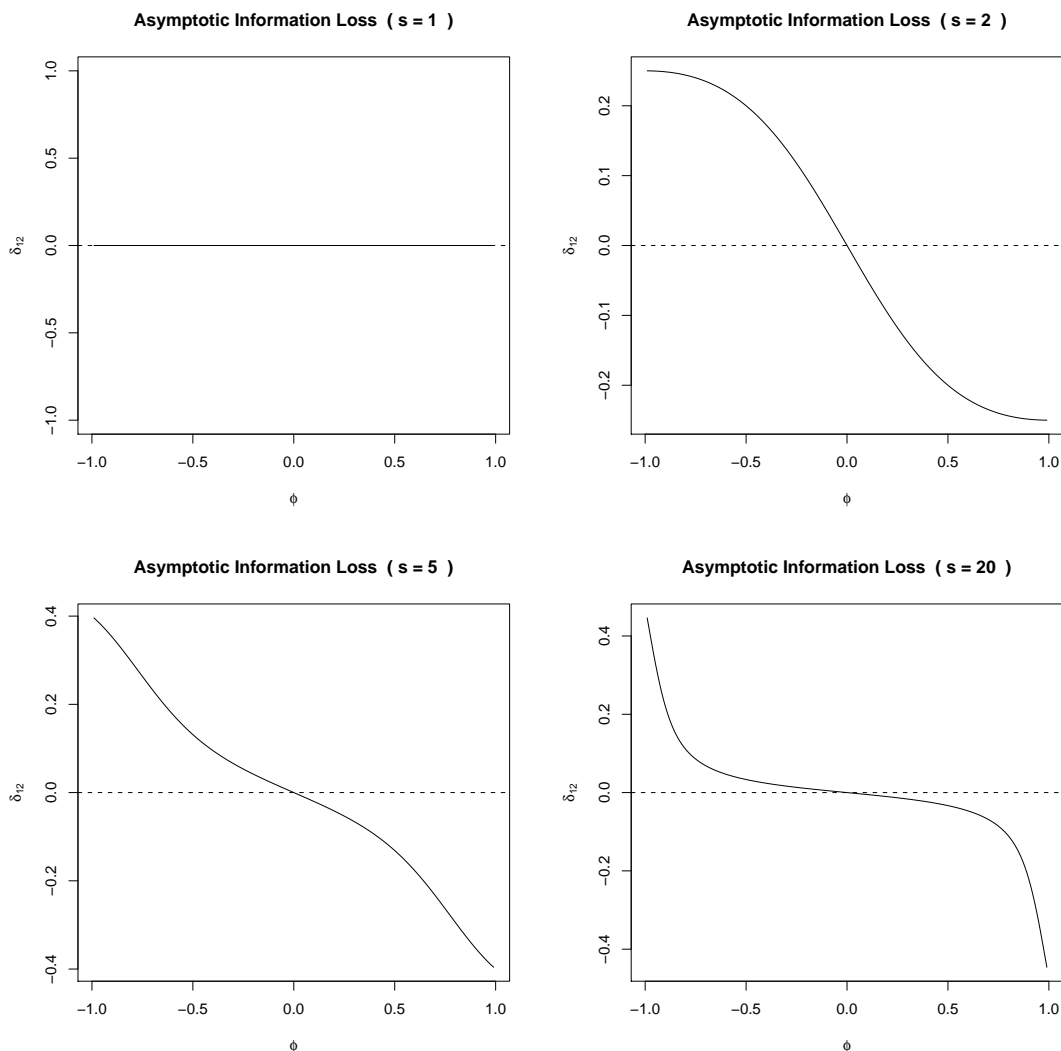


図 3: 領域  $|\phi| \leq 1$  における  $s = 1, 2, 5, 20$  での  $\delta_{12}$  ( $\sigma^2 = 1$ )

この図からは,  $\delta_{12}$  のグラフが,  $s = 1$  のときを除いて,  $\phi$  に関して単調減少曲線となっていることである.

最後に, 漸近的情報量損失における (2, 2)-成分を考える.

$$\delta_{22} = \frac{1}{2\sigma^4} \left(1 - \frac{1}{s}\right)$$

$\delta_{22}$  のグラフは,  $\sigma^2 = 1$  のときの  $s = 1, \dots, 20$  で下図のようになる.

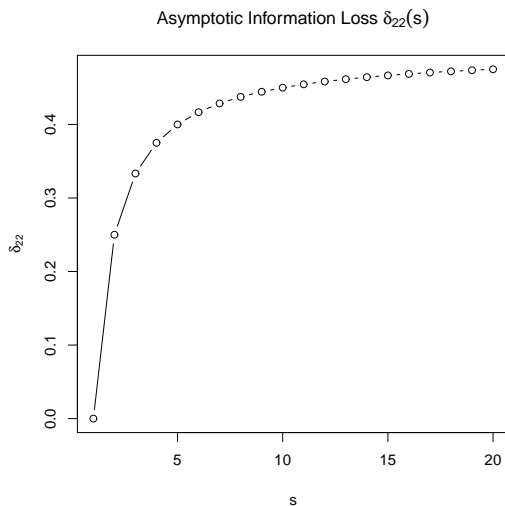


図 4:  $\sigma^2 = 1$  のときの  $s = 1, \dots, 20$  での  $\delta_{22}$

このグラフの挙動は,  $\delta_{22}$  の式から明らかである.

#### 4 情報量損失の比の性質

系 2 において漸近的情報量損失を考えたが, ここでは正確な情報量損失を全体の情報量で割って得た情報量損失の比を考えよう. 次の定理は, 定理 1 と系 2 から容易に得られる.

定理 4  $n = sm$  のときの情報量損失の比の極限は次のようになる:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{I}_n(\boldsymbol{\theta})^{-1} \left( \mathbf{I}_n(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{I}_{m|n}(\boldsymbol{\theta}) \right) = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix}.$$

但し,

$$r_{11} = 1 - \frac{2\phi^2(1 - \phi^{2s})^2 + (1 - \phi^2)\nu(\phi, s)}{s(1 - \phi^2)(1 - \phi^{2s})^2}, \quad r_{22} = 1 - \frac{1}{s},$$

$$r_{12} = -\frac{1}{s\sigma^2} \left( \phi - \frac{s\phi^{2s-1}(1 - \phi^2)}{1 - \phi^{2s}} \right), \quad r_{21} = -\frac{2\sigma^2}{s} \left( \frac{\phi}{1 - \phi^2} - \frac{s\phi^{2s-1}}{1 - \phi^{2s}} \right).$$

$r_{11}$  と  $r_{22}$  に対応するグラフは以下の通りである：

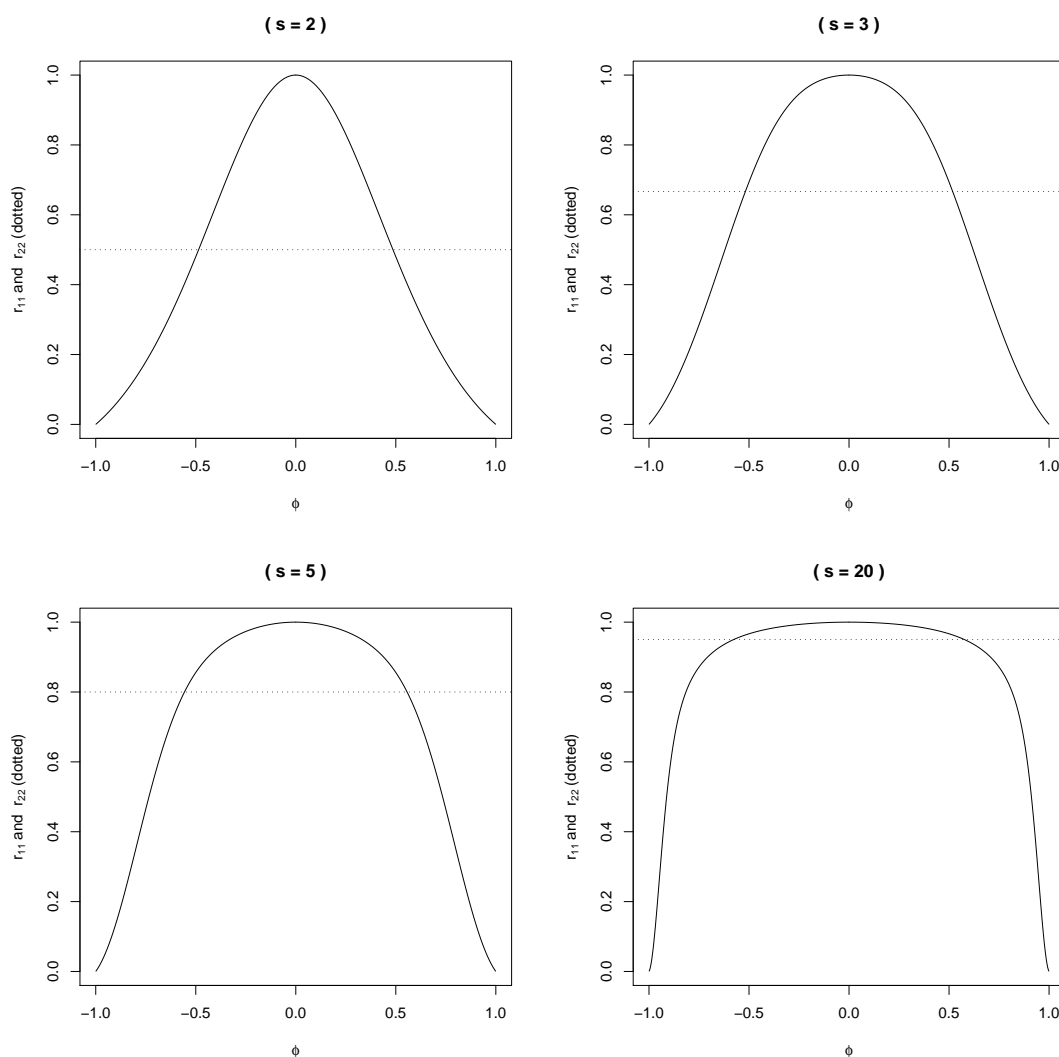


図 5:  $s = 2, 3, 5, 20$  での  $r_{11}$  (実線) と  $r_{22}$  (破線)

これらのグラフによると、比  $r_{11}$  は抽出間隔  $s$  の値に関わらず、 $\phi$  に関して単調性を持つことが分かり、系 2 における  $\delta_{11}$  との乖離が甚だしい。

分散  $\sigma^2$  において、比  $r_{22}$  と  $\delta_{22}$  は抽出データに関して構造的な式となっていると考えることが出来る。それは、独立同一分布に従う場合における抽出では、正確な情報量損失が  $(n - m)I$  でその比は  $1 - 1/s$  となるからである。

次に抽出間隔  $s = 5, 20$  で定理 4 における  $r_{12}$  と  $r_{21}$  のグラフを考えよう。

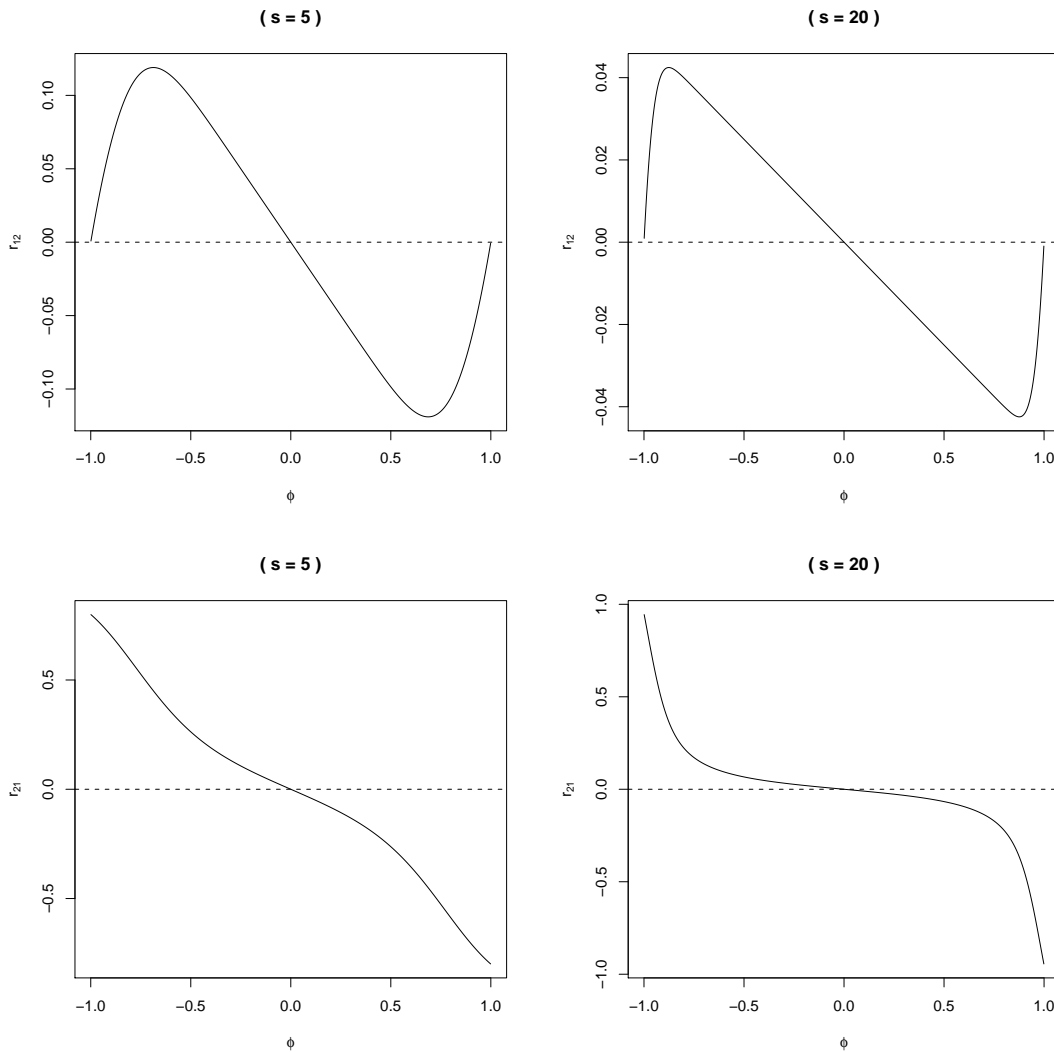


図 6:  $s = 5, 20$  での  $r_{12}$  (上段) と  $r_{21}$  (下段)

上のグラフから,  $r_{21}$  の振る舞いが  $\delta_{21} = \delta_{12}$  のものとよく似ていることが分かる. これらは定数項を除いて一致しているからである. しかし,  $r_{12}$  は  $\delta_{12}$  のような単調性を持っていない.

全体としては, 情報量損失の比は, 各成分のグラフにおいて, 抽出間隔  $s$  によって似たような形状を持つことが分かる.

## 5 おわりに

我々は,  $AR(1)$  において全体のデータと抽出されたデータでの正確な情報量損失を調べ, 抽出間隔に関するより詳細な近似の下で漸近的な情報量損失を得た. その結果, 正確な抽出された情報量における抽出ファクターを得たことは大きい. また, 情報損失の比も得た.

$AR(1)$  モデルにおけるパラメータ  $\theta = (\phi, \sigma^2)$  に対して, 抽出データの情報量は, 抽出間隔を 1 とすれば全体データの情報量と一致するので, 全体データの情報量の一般化ともいえる.

漸近的情報量損失は、抽出間隔と  $\phi$  の値に強く依存しているが、それは  $\delta_{11}$  において顕著である。そこで面白い現象は、抽出間隔  $s \geq 3$  において、 $\phi$  の値により、 $\delta_{11}$  が値 1 の辺りを上下に動くことである。これは、 $AR(1)$  モデルにおける係数  $\phi$  によって、抽出間隔によって情報量損失の値が 1 に比べて、増えることもあれば減ることもあることを示しているため、非常に単純な時系列モデルといえども、抽出間隔を慎重に考える必要があることを示している。

しかしながら、漸近的情報量損失の比  $r_{11}$  は、 $s = 1$  のときを除いて  $\phi$  に関して単調性を持つ。また、漸近的情報量損失における  $\delta_{12} = \delta_{21}$  は  $\phi$  に関して単調性を持っていたが、その比  $r_{12}$  と  $r_{21}$  は同一ではなく、 $r_{12}$  は単調性も持たない一方で、 $\delta_{22}$  は  $1 - 1/s$  に比例しており、その比  $r_{22}$  は正確に  $1 - 1/s$  となる。これは、分散に関する情報量損失だけは、全体のデータから抽出されたデータの割合に比例することを示している。

以上の結果から、たとえ単純なモデルである  $AR(1)$  のパラメータを推定するときですら、全体のデータから安易にデータを抽出すると思わぬ情報量損失を被ることになるのが分かる。特にファイナンスの株価において、日次データから週次データや月次データを得るときに情報量損失を認識する必要がある。

## 参考文献

- [1] Bandi, F.M. and Phillips, P.C.B.(2003). Fully Nonparametric Estimation of Scaler Diffusion Models. *Econometrica*, **71**, 241–283.
- [2] Brockwell, P.J. and Davis, R.A.(1991). *Time Series : theory and methods, Second Edition*, Springer.
- [3] Grabchak, M. and Samorodnitsky, G.(2010). Do Financial Returns Have Finite Or Infinite Variance? A Paradox And An Explanation. *Quantitative Finance*, **10**, 883–893.
- [4] Kenward, M.G. and Molenberghs, G.(1998). Likelihood based frequentist inference when data are missing at random. *Statistical Science*, **13**, 236–247.
- [5] Kondo, M. (2010). Personal Communications.
- [6] Kumagai, E.(2009). Information Loss of Extracted Series in  $AR(1)$  Model. *Scientiae Mathematicae Japonicae*, **69**, 329–339; (2010) Correction. *Scientiae Mathematicae Japonicae* **72**, 317–319.
- [7] Masuda, H.(2009). Joint Estimation of Discretely Observed Stable Lévy Processes with Symmetric Lévy Density. *J. Japan Statist. Soc.*, **39**, 49–75.
- [8] Merton, R.C.(1973). An Intertemporal Capital Asset Pricing Model. *Econometrica*, **41**, 867–887.
- [9] Straumann, D.(2005). *Estimation in Conditionally Heteroscedastic Time Series Models*, Springer.
- [10] Tsay, R.S.(2005). *Analysis of Financial Time Series, Second Edition*, John Wiley & Sons.
- [11] Yuan, K.(2009). Normal distribution based pseudo ML for missing data: With applications to mean and covariance structure analysis. *Journal of Multivariate Analysis*, **100**, 1900–1918.

## \* 正会員申込用紙

## 正会員入会申込書

氏名			英語名		
次の2つのうち会報等を送付先とする方に を付けてお書き下さい。					
所属先 住所	〒				
住所	〒				
専門分野	表 f*より選んで○で囲って下さい f-1, f-2, f-3, f-4, f-5, f-6, f-7, f-8, f-9, f-10, f-11, f-12, f-13, f-14				
E-mail address			電話番号		
			Fax 番号		
会員区分 該当部分にチェ ック	<input type="checkbox"/> A1 一般1年 <input type="checkbox"/> A3 一般3年 <input type="checkbox"/> S-A1 高齢者又は学生1年 <input type="checkbox"/> S-A3 高齢者又は学生3年 <input type="checkbox"/> 生涯会員				
所属先の 施設	<input type="checkbox"/> ビデオ会議可能 <input type="checkbox"/> 遠隔会議可能 <input type="checkbox"/> コンピューターセンター				
所属先の 通信システム	<input type="checkbox"/> ISDN <input type="checkbox"/> IP				
所属大学等が 機関会員	<input type="checkbox"/> 会員である <input type="checkbox"/> 会員でない				
SCMJ のプリント版の購入					
<input type="checkbox"/> 希望 1年会員 3,000 円、3年会員 8,000 円**〔前払い〕			<input type="checkbox"/> 希望しない		
高齢会員を申し 込む場合	生年月日		学生会員の場合は在学証を添付		
日付					
私は ISMS 会員になり、国際数理科学協会に送り状に記載された年 会費を払います。ISMS 会員として受け取った Scientiae Mathematicae Japonicae のコピーは個人使用とし、機関、大学また は図書館やその他の組織の中に置かず、閲覧目的で会員購読するこ ともしません。			署名		

\* Notices from the ISMS March 2008 p.25 を御参照下さい。\*\*ただし、3年間一括の場合は 8,000 円です。  
この申込みの内容は会との連絡以外には使用いたしません。

### Application form for an individual member of ISMS

Family Name		First & Middle Name												
Check one of the following addresses to which "Notices from the ISMS" should be sent.														
Address of your institution (university)	<input type="checkbox"/>													
Home address	<input type="checkbox"/>													
Special fields*	f-1	f-2	f-3	f-4	f-5	f-6	f-7	f-8	f-9	f-10	f-11	f-12	f-13	f-14
E-mail address			Tel.											
			Fax											
Membership category** (Circle one)	A1, A3, SA1, SA3, F1, F3, SF1, SF3, D1, D3, SD1, SD3, AL, FL, DL													
Check the facilities your institution has.	Conference room(s) for video conference Computer center													
Communication system of your institution	<input type="checkbox"/> ISDN <input type="checkbox"/> IP													
Is your institution (university) an Institutional Member of ISMS?	<input type="checkbox"/> Yes <input type="checkbox"/> No													
I subscribe to the printed version of SCMJ.	<input type="checkbox"/> ¥3,000 (US\$37, €27) per year for those members of A1, SA1, F1, and SF1, D1 and SD1. <input type="checkbox"/> ¥2,700 (US\$34, €25) per year for those members of A3, SA3, F3, SF3, D3, SD3, AL, FL, and DL. <input type="checkbox"/> In case A3, SA3, F3, SF3, D3, SD3, AL, FL, or DL members make the payment at a time in advance, the price for 3 years is ¥8,000 (US\$100, €73).													
For the aged member, write your birth year.							For the student member, student registration certificate should be attached.							
Date of Application														
I wish to enroll as a member of ISMS and will pay to International Society for Mathematical Sciences the annual dues upon presentation of an invoice. Copies of <i>Scientiae Mathematicae Japonicae</i> received as an ISMS member will be for my personal use only and shall not be placed in institutional, university or other libraries or organizations, nor can membership subscriptions be used for library purposes.														
Signature														

\* Notices from the ISMS March 2008 p.25 を御参照下さい。

\*\*Notices from the ISMS March 2008 p.28 を御参照下さい。

## ISMS (JAMS の継続) 会員募集

ISMS の出版物: ISMS は、創刊より約 60 年、国際的に高い評価を得ている Mathematica Japonica (M.J.) と、その姉妹誌で電子 Journal と Paper 誌とを持つ、Scientiae Mathematicae (SCM) とを発行してきました。両誌は合併して、“21 世紀 MJ/SCM New Series, Scientiae Mathematicae Japonicae (SCMJ)” として、電子版は 2000 年 9 月より発行してきました。印刷版は、1978 年 1 月より、年間 6 冊、700 ~ 1200 頁を出版していましたが、最近の諸般の事情により本年からは年 3 回発行となりました。なお、全体として 260 巻を超える、日本で最大量を誇る数理科学の雑誌です。その特長は、下の 1) ~ 7) です。

- 1) Editorial Board には、国内だけでなく、海外 15 カ国の著名な研究者 40 名が参加している。
- 2) 世界の research group に論文が紹介され、積極的な交流が推進されている。
- 3) Editor を窓口として直接論文を投稿できて、迅速な referee 及び出版が得られる。
- 4) 有名な数理科学者の original paper や、研究に役立つ survey が、毎号載せられている。
- 5) SCMJ は、世界の有名数理科学者による、極めて興味ある expository paper を、毎号 International Plaza 欄に掲載している。世界各国の図書館へ、広く配布されている。
- 6) 投稿論文は、accept 後 (又は組版後) 待ち時間 0 で発行されます。
- 7) 別刷作成について、ページ数に無関係に一編について ¥100 (US\$ 1) でお分けいたします。
- 8) Mathematical Reviews, Zentralblatt に from cover to cover で review されている。

ISMS の研究集会: (1) 研究仲間がゆっくり時間をかけて発表、討論をする、特色ある参集型研究集会が毎年行われ、非会員も含む多数の参加者の、活発な研究交流の場となっている。(2) ISMS には内外の著名な研究者が多数入っておられる。近いうちに内外を結ぶ高い level の研究会が online で行われる事を期待している。(本誌 45 号 3p 及び Notices March 2006 9p を御参照下さい)

ISMS の学術賞: 会員の優れた論文を広く世界に紹介し、更なる研究を奨励するために、ISMS 賞、JAMS 賞、Shimizu 賞、Kunugui 賞、Kitagawa 賞を設けている。(詳しくは本誌 45 号 2p 会則 13 条を御参照下さい)

< ISMS の会員の特典 > 1 . SCMJ 電子版の購読 (print out も含む) 無料。 2 . SCMJ print 版の少額での購読 (下表 1) 。 < 機関購読会員の特典 > 1 . 機関内の 2 名の方を準会員として会費無料でほぼ会員と同じ権利を持つものとして登録することが出来る。

	正会員 (1 年)	正会員 (3 年)	機関会員	定価
表 1 【雑誌購読費】	Print ¥3,000 US\$ 37, €27	¥2,700* US\$ 34, €25	¥18,000 US\$225, €164	¥23,000 US\$288, €210
	Online Free	Free		
	Online+print ¥3,000 US\$37, €27	¥2,700 US\$34, €25	¥18,000 US\$225, €164	¥23,000 US\$288, €210

\* 3 年会員のみ、雑誌購読費 3 年分前払いの場合は ¥8,000 (US\$ 100, €73) になります。  
著者の方には、SCMJ を 1 冊送料込みで 1,000 円または US \$ 12 で購入できます。

Categories	国内会員	海外会員	途上国会員
表 2 【2012 年の会費】	単年度 A 会員 ¥6,000	US\$ 75, €55	US\$ 45, €33
	3 年 A 会員 ¥16,000	US\$ 200, €147	US\$ 120, €88
	単年度 S 会員 ¥4,000	US\$ 50, €37	US\$ 30, €22
	3 年 S 会員 ¥10,000	US\$125, €92	US\$ 74, €54
	生涯会員** ¥60,000	US\$ 750, €550	US\$ 440, €323

\*\*過去 10 年以上、正会員であった方に限る。

A 会員は正会員を指し、S 会員は、学生会員と高齢会員(70 歳以上)を指します。

国際数理科学協会  
International Society for Mathematical Sciences

〒590-0075 堺市堺区南花田口町 2-1-18 新堺東ビル内  
Tel: (072)222-1850 / Fax: (072)222-7987 URL: <http://www.jams.or.jp>