



# 国際数理科学協会会報

No.61/ 2009. 1

編集委員： 藤井正俊(委員長)、藤井淳一

## 目次

- |           |                         |
|-----------|-------------------------|
| * 寄稿      | * 雑誌の案内                 |
| * 訃報      | * page charge 大幅減額のお知らせ |
| * 石原先生追悼号 | * 機関会員募集                |
| * 寄付      | * 正会員申込用紙               |
| * 会長選挙予告  | * 会員募集                  |

\* 寄稿

## 可換エルミート行列の同時対角化

とみなが まさる

富永 雅

(富山高専)

### 1. 可換なエルミート行列

以下、各成分が複素数の正方行列を考える。行列  $A = (a_{ij})$  に対して、 $*$ -演算を  $A^* = (a_{ji}^*)$  ( $z^*$  は  $z$  の共役複素数) によって定義する。ここで、特に  $A = A^*$  が成り立つとき、 $A$  をエルミート行列という。

線形代数は、行列及び行列式についての理論と言えるが、その到達目標の1つが、

「エルミート行列の対角化」

である。つまり、

**定理 1.** エルミート行列  $A$  は、適当なユニタリ行列  $U$  ( $U^*U = UU^* = I$ : 単位行列) によって対角化できる:

$$U^*AU = D: \text{対角行列}$$

実際、 $D$  の対角成分は、重複度を込めて  $A$  の固有値が並ぶ。

この定理は、殆どの線形代数のテキストで見ることができる。しかし、時として必要になる次の定理がなぜか余りお目にかかることはない。

**定理 2. (同時対角化可能定理)** 可換なエルミート行列  $A, B$  は、適当なユニタリ行列によって同時に対角化できる:

$$U^*AU = D_1, U^*BU = D_2: \text{対角行列}$$

実際,  $D_1, D_2$  の対角成分は, 重複度を込めて  $A, B$  の固有値が並ぶ.

### 3. 定理 2 の証明

まず, テキスト [1] に載っている標準的な証明を少し翻訳して紹介する.

**証明 I.**  $AB = BA$  として,  $A$  は対角行列としてよいだろう. このとき, (以下の  $A$  のように) 等しい固有値は対角成分にまとめて現れるようになっているものとする. もう少し突っ込んで言うと,  $A$  の異なる各固有値  $t_k$  の固有空間  $E_k$  と, 対応する射影行列  $P_k$  を

$$E_k = \{x \mid Ax = t_k x\} = \{x \mid P_k x = x\}$$

とするとき,

$$x \in E_k, ABx = BAx = t_k Bx \text{ より, } Bx \in E_k. \text{ 即ち } BE_k \subset E_k$$

となって,  $B$  がエルミットだから, 各固有空間はいわゆる reducing subspace になっている. つまり,  $BP \in B(PH)$  となっているので,  $H = E_1 \oplus \cdots \oplus E_m$  の分解に対応して,

$$A = \begin{pmatrix} t_1 I_{E_1} & & \\ & \ddots & \\ & & t_m I_{E_m} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_m \end{pmatrix}$$

とかけているので, 各空間のユニタリ  $U_k \in B(P_k H)$  によって,  $U_k^* B_k U_k$  は対角行列  $D_k$  にできるから, ユニタリ  $U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$  を考えれば,

$$U^*AU = \begin{pmatrix} t_1 U_1^* U_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_m U_m^* U_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 I_{E_1} & & \\ & \ddots & \\ & & t_m I_{E_m} \end{pmatrix},$$

$$U^*BU = \begin{pmatrix} U_1^* B_1 U_1 & & \\ & \ddots & \\ & & U_m^* B_m U_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 & & \\ & \ddots & \\ & & D_m \end{pmatrix}$$

と同時に対角化できる.

次に, 行列の次数についての帰納法による証明を補足する.

**証明 II.** まず, 行列  $A, B$  の次数を  $n$  とする.  $A$  は対角行列としてよいことに注意し, その対角成分を使って,  $A = D(a_1, \dots, a_n)$  と表記する.

まず,  $n = 2$  のとき,

$$A = D(a, b), \text{ or } = D(a, a)$$

のいずれかである. 後者の場合には, どんなユニタリ行列  $U$  に対しても,  $U^*AU = A$  なので,  $B$  を対角化するユニタリ行列を取ればよい. さて, 前者の場合であるが,  $a \neq b$  より,  $A$  と可換な  $B$  は, それ自身も対角行列にならねばならないことはすぐに知られる.

そこで,  $(n-1)$  次まで, 成立していると仮定して,  $n$  次の場合を点検する. 事前の準備として,  $A$  の対角は次のように配列されているとして一般性を失わない.

$$A = D(a, \dots, a, a_1, \dots, a_k) \quad (a_j \neq a, 1 \leq k \leq n-1)$$

このような  $A$  と可換になるような  $B$  は, 条件:  $a_j \neq a$  ( $j = 1, \dots, k$ ) が効いて,

$$A = \left( \begin{array}{ccc|ccc} a & & & & & \\ & a & & & & \\ & & a & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & a & \\ \hline & & & & & \\ & & & & a_1 & \\ & & & & & a_2 & \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & a_3 \\ & & 0 & & & & \ddots \\ & & & & & & & a_k \end{array} \right)$$

に対して

$$B = \left( \begin{array}{c|c} B_1 & 0 \\ \hline 0 & B_2 \end{array} \right)$$

と直和分解される. そうすると, 左側の部分は, スカラー  $a$  と  $B_1$  なので, 問題はない. 一方, 右側の部分は, 次数が減っているので帰納法の仮定で保証されることになる. それらの各ユニタリ行列  $V, W$  を

$$U = \left( \begin{array}{c|c} V & 0 \\ \hline 0 & W \end{array} \right)$$

と定めることにより, 求めるものが得られる.

#### 4. 正規行列による統合

前節で見られるのように, 証明は可能ではあるが, 可換な2つのエルミート行列を統合する何か具体物がほしい. これについて, 次のような問題設定を試みたい:

問 「2つの可換なエルミート行列を、右手と左手を単に“手”というような形に統合するにはどうすればよいのか？」

このためには、当然エルミート性より大きな枠組みをセットしなければならない。ここでも、やはり可換性がキーになる。

**定義 3.**  $N$  と  $N^*$  が可換なとき、 $N$  を正規行列という。

ここで、エルミート行列と正規行列の関係について説明しておきたい。行列の枠組みの中でのエルミート行列の位置は、複素数の中での実数の位置に対応している。さらに、この対応関係から見ると、正に正規行列が複素数に対応していることになる。一方、複素数  $z = a + ib$  ( $a, b$  は実数) について、

$$a = (z + z^*)/2, \quad b = (z - z^*)/2i$$

という関係が成り立っている。(ただし、 $z^*$  は、 $z$  の共役数を意味する。) この分解は、 $z$  のデカルト分解と呼ばれている。この分解は、行列に対しても適用でき、同じデカルト分解という名で呼ばれている。

行列  $T$  に対して、

$$A = (T + T^*)/2, \quad B = (T - T^*)/2i$$

とすると、 $A, B$  はエルミート行列で、

$$T = A + iB$$

が成り立つ。また  $A, B$  は、それぞれ  $T$  の実部、虚部と呼ばれ  $\operatorname{Re} T$ ,  $\operatorname{Im} T$  と書かれる。直ぐにわかる事実であるが、デカルト分解は一意的であることに注意しておきたい。

これだけの準備の下で、上の問に対する実質的な解答が得られる。

**定理 4.** 行列  $T$  のデカルト分解を  $T = A + iB$  とするとき、 $T$  が正規行列であるための必要十分条件は、 $A$  と  $B$  が可換であることである。

この定理 4 は、正規行列の対角化ができれば、可換な 2 つのエルミート行列の同時対角化ができる、つまり、定理 2 が自動的に定理 4 から導かれることを保証している。

#### 参考文献

- [1] 笹尾靖也, 「理工系の線型代数学」 学術図書
- [2] 佐竹一郎, 「線形代数学」 裳華房

\* 訃報

石原忠重先生（大阪府立大名誉教授）は昨年暮れ12月17日に肺炎のためお亡くなりになりました。88歳でした。先生は当協会ではあるときは理事長とてまた、雑誌 *Scientiae Mathematicae Japonicae* の chair of board of managing editors として編集に大変ご尽力頂きました。謹んでご冥福をお祈りいたします。

\* 石原先生追悼号

表記題で印刷物を出したいと思います。詳細が決まりましたら、Net でお知らせしたいと思います。ご協力の程お願い致します。

\* 寄付

大和 元 先生(10月)・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ ¥10,000

中西 シヅ 先生(12月)・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ ¥300,000

頂いた御寄付は

- (1) 新しい prize（北川賞、功力賞、国際数理科学協会賞等）のメダルの作成費
- (2) 阪大中之島センターにおける海外研究者との研究交流の部屋の使用料その他これに準じるものに利用させていただきます。

御寄付頂いた方の指定された使途に使わせて頂きます。

\* 会長選挙予告

現在次期会長の席は空席になっていますので、会長選挙を下記の日程で実施します。

- 1、この会報61で候補者の公募を公示します。候補者は
  - (1) 会員2名以上の推薦状, (2) 候補者の簡単な履歴, (3) 主な研究歴(受賞を受けた事があれば受賞について、その名称と年月日、授賞を行った学術団体), (4) 候補者の ISMS 運営についての考え 以上の書類を2009年4月30日必着で事務局宛郵送して頂きます。
- 2、会報63号(2009年5月10日発行予定)に候補者に関する(1)~(4)の記事を載せ、投票を(www, e-mail等)開始します。投票〆切は2009年6月15日とします。
- 3、会報64号(2009年7月10日発行予定)に開票結果の公示します。任期は2009年7月1日より2010年12月31日までです。

\* 雑誌の案内

会員の属する大学等で、最近数学関係の雑誌は大学の法人化などで手に入れるのが経済的に困難なところもあるのではないのでしょうか。ここ協会には諸外国より、有名な雑誌が送られてきています。例えば、次の様な雑誌です。

- (1) Acta Scientiarum Mathematicarum
- (2) Annali scuola normale superiore—pisa—classe di scienze
- (3) Annals de L'Institut Fourier
- (4) Annals of Mathematics
- (5) Bollettino Unione Mathematica Italiana (sezione A , B )
- (6) Bulletin of the Australian Mathematical Society
- (7) Canadian Journal of Mathematics
- (8) Colloquium Mathematicum
- (9) Communications on pure and Applied Mathematics
- (10) Indiana University Mathematics Journal
- (11) Journal of the London Mathematical Society
- (12) Memoirs of the American Mathematical Society
- (13) Monatshefte fur Mathematik
- (14) Portugaliae Mathematica
- (15) Proceedings of the Japan Academy (series A , B)
- (16) Quarterly of Applied mathematics
- (17) Revista Mathematica Iberoamericana
- (18) Revue Roumaine de Mathematiques Pures et Appliquee
- (19) Serdica Mathematical Journal
- (20) Tohoku Mathematical Journal 東北数学雑誌

その他、多くの外国からの寄贈があります。また、日本で発行の著名な雑誌もあります。もし、先生の教室でこれらの雑誌に興味がありましたら、協会宛ご連絡下さい。研究に役立てることを希望いたします。

## \* Page Charge の大幅減額のお知らせ

昨年 月より page charge の改定がありました。それは従来のもっと大きく異なるものです。そこで再度掲載いたします。端的に言うと大幅な **discount** です。従来のように名称として page charge を用いてますが、それは組版代及び別刷代 (20 部) であり、特段投稿料というものではありません。猶従来のように、審査は早く、掲載には時間を取らない協会の雑誌 "Scientiae Mathematicae Japonicae" に是非投稿を御願います。会員の方で御存知ない方もおられると思います。そこで、その表をお知らせします。

page charge per printed page は下表の通りです。

	ISMS members	Non-members
paper P	¥ 3,500 ( US\$35, € 23 )	¥ 4,000 ( US\$40, €27 )
Tex	¥ 2,000 ( US\$20, € 14 )	¥ 2,500 ( US\$25, €17 )
LateX2e, LaTeX	¥ 700 ( US\$ 7, € 4 )	¥ 1,000 ( US\$10, € 7 )
Js ( ISMS style file )	¥ 500 ( US\$ 5, € 3 )	¥ 800 ( US\$ 8, € 5 )

論文が掲載されましたら、連絡費、抜刷送料の事務処理として、一編について¥1,000 及び上記の page charge を請求させていただきます。この表を御覧になるとおわかりのように、投稿原稿の種類により随分と費用が異なりますので、出来れば協会指定の Js ( ISMS style file ) で投稿を御願致します。また、会員になりますと更に **discount** があります。これを機会に皆様方の更なる投稿をお待ちしております。

## \* 機関会員募集

機関会員の特典としては

- (1)本屋より SCMJ を購入すると、print 版 45,000 円ですが、機関会員になると、print 版 33,000 円で **online** も見ることができます。
- (2)会員でない 2 名の方を準会員 (会費不要) として登録することができます。これにより、page charge (別刷代金) が会員と同じ扱いになります。
- (3)上の準会員 2 名は **online** で SCMJ を見る事ができます。
- (4) **Net** を用いて国際研究集会を催す時、アナウンス、アブストラクトの作成などお助けいたします。大学、研究所等が協会から SCMJ 誌の直接購入すると、今年から **online** も無料で見るようになるようになりました。

機関会員の申込用紙です。適当にお使い下さい。

上にも書きましたように、2006 年より発効の機関会員制度により各機関会員に所属の研究者 2 名を会費無料で準会員として登録しますと、準会員が SCMJ に **accept** された論文を掲載するときの page charge (別刷代金) は会員と同額とすることにしました。

この新しい制度の機関会員の P.R.を、日本国内外 (BRICS 諸国など) 400 大学に向けて、昨年 1 月から始めています。同時に今迄の SCMJ 投稿者で会員でない方、また、個人会員および (機関会員の) 準会員加入の P.R.も始めています。

\* Application for Academic and Institutional Member of ISMS

<b>Subscription of SCMJ</b>	□Print + Online (¥33,000, US\$300)
<b>University (Institution)</b>	
<b>Department</b>	
<b>Postal Address</b> where SCMJ should be sent.	
<b>E-mail address</b>	
<b>Person in charge</b>	Name: Signature:
<b>Payment</b> Check one of the two.	□Bank transfer      □Credit Card (Visa, Master)
<b>Name of Associate Members</b>	1.
	2.

正会員の特典としては(1)online で SCMJ をみることが出来ます。(2)論文の掲載時に page charge(別刷代金)が随分と安くなる。

(3) Net を用いて国際研究集会を催す時、アナウンス、アブストラクトの作成などお助けいたします。6,000 円を支払うと、hard-copy の SCMJ が一年を通じて手に入ります。

(4) 10 年間個人会員を続けると、国内会員は 70,000 円、外国会員は US\$600、途上会員は US\$500 を支払うと生涯会員となれます。

2008 年度からの会費

Categories	国内会員	海外会員	途上国会員
単年度 A 会員	¥9,000	US\$75, €60	US\$45, €36
3 年 A 会員	¥24,000	US\$200, €160	US\$117,
単年度 S 会員	¥5,000	US\$40, €32	US\$27, €21
3 年 S 会員	¥12,000	US\$100, €80	US\$71, €57
生涯会員	¥90,000	US\$740, €592	US\$616, €493

日本語が出来る方の入会の申込用紙です。また、英語版も書いて頂くこととなります。近く Net 上で申し込み可能となるようにしますので、入会しようとする方はそれをご利用下さい。



\* 正会員申込用紙

正会員入会申込書

氏名			英語名	
次の2つのうち会報等を送付先とする方に○を付けてお書き下さい。				
所属先住所	〒			
住所	〒			
専門分野	表 f*より選んで○で囲って下さい f-1, f-2, f-3, f-4, f-5, f-6, f-7, f-8, f-9, f-10, f-11, f-12, f-13, f-14			
E-mail address			電話番号	
			Fax 番号	
会員区分 該当部分にチェック	<input type="checkbox"/> A1 一般1年 <input type="checkbox"/> A3 一般3年 <input type="checkbox"/> S-A1 高齢者又は学生1年 <input type="checkbox"/> S-A3 高齢者又は学生3年 <input type="checkbox"/> 生涯会員			
所属先の施設	<input type="checkbox"/> ビデオ会議可能 <input type="checkbox"/> 遠隔会議可能 <input type="checkbox"/> コンピューターセンター			
所属先の通信システム	<input type="checkbox"/> ISDN <input type="checkbox"/> IP			
所属大学等が機関会員	<input type="checkbox"/> 会員である <input type="checkbox"/> 会員でない			
SCMJ のプリント版の購入				
<input type="checkbox"/> 希望 1年に付き 1年会員 6,000円、3年会員 5,500円**			<input type="checkbox"/> 希望しない	
高齢会員を申し込む場合	生年月日	学生会員の場合は在学証を添付		
日付				
私は ISMS 会員になり、国際数理科学協会に送り状に記載された年会費を払います。ISMS 会員として受け取った Scientiae Mathematicae Japonicae のコピーは個人使用とし、機関、大学または図書館やその他の組織の中に置かず、閲覧目的で会員購読することもしません。			署名	

\* Notices from the ISMS March 2008 p.25 を御参照下さい。\*\*ただし、3年間一括の場合は15,000円です。この申込みの内容は会との連絡以外には使用いたしません。

## Application form for an individual member of ISMS

I wish to enroll as a member of ISMS and will pay to International Society for Mathematical Sciences the annual dues upon presentation of an invoice. Copies of Scientiae Mathematicae Japonicae received as an ISMS member will be for my personal use only and shall not be placed in institutional, university or other libraries or organizations, nor can membership subscriptions be used for library purposes.			
Family Name		First & Middle Name	
Check one of the following addresses to which "Notices from the ISMS" should be sent.			
Address of your institution (university)	<input type="checkbox"/>		
Home address	<input type="checkbox"/>		
Special fields*	f-1 f-2 f-3 f-4 f-5 f-6 f-7 f-8 f-9 f-10 f-11 f-12 f-13 f-14		
E-mail address			Tel.
			Fax
Membership category** (Circle one)	A1, A3, SA1, SA3, F1, F3, SF1, SF3, D1, D3, SD1, SD3, AL, FL, DL		
Check the facilities your institution has.	<input type="checkbox"/> Conference room(s) for video conference <input type="checkbox"/> Computer center		
Communication system of your institution	<input type="checkbox"/> ISDN <input type="checkbox"/> IP		
Is your institution (university) an Institutional Member of ISMS?	<input type="checkbox"/> Yes <input type="checkbox"/> No		
<input type="checkbox"/> I subscribe to the printed version of SCMJ.	<input type="checkbox"/> ¥6,000 (US\$60, €48) per year for those members of A1, SA1, F1, and SF1, D1 and SD1. <input type="checkbox"/> ¥5,500 (US\$55, €44) per year for those members of A3, SA3, F3, SF3, D3, SD3, AL, FL, and DL. <input type="checkbox"/> In case A3, SA3, F3, SF3, D3, SD3, AL, FL, or DL members make the payment at a time in advance, the price for 3 years is ¥15,000 (US\$150, €120).		
For the aged member, write your birth year.			For the student member, student registration certificate should be attached.
Date of Application			
Signature			

\* Notices from the ISMS March 2008 p.25 を御参照下さい。

\*\*Notices from the ISMS March 2008 p.28 を御参照下さい。

## ISMS (JAMS の継続) 会員募集

ISMS の出版物：ISMS は、創刊より約 60 年、国際的に高い評価を得ている *Mathematica Japonica* (M.J.) と、その姉妹誌で電子 *Journal* と *Paper* 誌とを持つ、*Scientiae Mathematicae* (SCM) とを発行してきました。両誌は合併して、“21 世紀 MJ/SCM *New Series*, *Scientiae Mathematicae Japonicae* (SCMJ)”として、電子版は 2000 年 9 月より発行してきました。印刷版は、1978 年 1 月より、年間 6 冊、700~1200 頁を出版しています。全体として 230 巻を超える、日本で最大量を誇る数理科学の雑誌です。その特長は、下の 1)~7) です。

- 1) Editorial Board には、国内だけでなく、海外 15 カ国の著名な研究者 40 名が参加している。
- 2) 世界の research group に論文が紹介され、積極的な交流が推進されている。
- 3) Editor を窓口として直接論文を投稿できて、迅速な referee 及び出版が得られる。
- 4) 有名な数理科学者の original paper や、研究に役立つ survey が、毎号載せられている。
- 5) SCMJ は、世界の有名数理科学者による、極めて興味ある expository paper を、毎号 International Plaza 欄に掲載している。世界各国の図書館へ、広く配布されている。
- 6) 投稿論文は、accept 後 (又は組版後) 待ち時間 0 で発行されます。
- 7) *Mathematical Review*, *Zentralblatt* に from cover to cover で review されている。

ISMS の研究集会：(1)研究仲間がゆっくり時間をかけて発表、討論をする、特色ある参集型研究会が毎年行われ、非会員も含む多数の参加者の、活発な研究交流の場となっている。(2)ISMS には内外の著名な研究者が多数入っておられる。近いうちに内外を結ぶ高い level の研究会が online で行われる事を期待している。(本誌 45 号 3p 及び Notices March 2006 9p を御参照下さい)

ISMS の学術賞：会員の優れた論文を広く世界に紹介し、更なる研究を奨励するために、ISMS 賞、JAMS 賞、Shimizu 賞、Kunugui 賞、Kitagawa 賞を設けている。(詳しくは本誌 45 号 2p 会則 13 条を御参照下さい)

<ISMS の会員の特典> 1. SCMJ 電子版の購読 (print out も含む) 無料。2. SCMJ print 版の少額での購読 (下表 1)。3. Page charge (別刷代金) の discount (下表 2)。

<機関購読会員の特典> 1. 機関内の 2 名の方を準会員として会費無料で登録することが出来る。2. 準会員は会員と同じ page charge (別刷代金) の discount を受けることが出来る。

表 1  
【雑誌購読費】

	正会員 (1 年)	正会員 (3 年)	機関会員	定価
Print	¥ 6,000 US\$ 60, €48	¥ 5,500* US\$ 55, €44	¥ 33,000 US\$ 300, €240	¥ 45,000 US\$ 400, €320
Online	Free	Free		
Online+print	¥ 6,000 US\$ 60, €48	¥ 5,500 US\$ 55, €44	¥ 33,000 US\$ 300, €240	¥ 45,000 US\$ 400, €320

\*3 年会員のみ、雑誌購読費 3 年前分払いの場合は ¥15,000 になります。

著者の方には、SCMJ を 1 冊送料込みで 1,200 円または US\$ 12 で購入できます。

表 2  
【ページチャージ】

	ISMS members	Non-members
p	¥ 3,500 ( US\$35, € 23 )	¥ 4,000 ( US\$40, €27 )
Tex	¥ 2,000 ( US\$20, € 14 )	¥ 2,500 ( US\$25, €17 )
LateX2e, LaTeX	¥ 700 ( US\$ 7, € 4 )	¥ 1,000 ( US\$10, € 7 )
Js ( ISMS style file )	¥ 500 ( US\$ 5, € 3 )	¥ 800 ( US\$ 8, € 5 )

別刷作成について、次の費用の分担をお願いします。原稿の組版についての連絡費、抜刷送料等の事務処理として、一編について ¥ 1,000、及び上表の各原稿の種類による組版費を請求させていただきます。

(2008 年 Vol.67 から実施)

表 3  
【2008 年の会費】

Categories	国内会員	海外会員	途上国会員
単年度 A 会員	¥9,000	US\$ 75, €60	US\$ 45, €36
3 年 A 会員	¥24,000	US\$ 200, €160	US\$ 117, €93
単年度 S 会員	¥5,000	US\$ 40, €32	US\$ 27, €21
3 年 S 会員	¥12,000	US\$ 100, €80	US\$ 71, €57
生涯会員**	¥90,000	US\$ 740, €592	US\$ 616, €493

\*\*過去 10 年以上、正会員であった方に限る。

A 会員は正会員を指し、S 会員は、学生会員と高齢会員(70 歳以上)を指します。

## 国際数理科学協会

### International Society for Mathematical Sciences

〒590-0075 堺市堺区南花田口町 2-1-18 新堺東ビル内

Tel: (072)222-1850 / Fax: (072)222-7987

URL: <http://www.jams.or.jp>