

一般社団法人

# 国際数理科学協会会報

No.113/2020.1

編集委員：藤井淳一（委員長）

目次

\* 寄稿

\* 寄稿

## Löwner-Heinz 不等式と norm 不等式

藤井 正俊 大阪教育大学 名誉教授

### 1 はじめに

本稿は、会報 111-19-10 に掲載された「非可換数学の華-Löwner-Heinz 不等式」の続編に当たります。

ここでは、ヒルベルト空間  $H$  上の有界線形作用素を単に作用素と呼ぶことにします。作用素  $A$  が positive ( $A \geq 0$ ) であるとは、

$$(Ax, x) \geq 0 \quad x \in H$$

が成り立つこととします。特に、 $A$  が positive かつ invertible のとき、 $A > 0$  で表します。行列で言えば、 $A$  が非負定値 (positive semidefinite) であることが positive ( $A \geq 0$ ) に、正定値が  $A > 0$  に当たります。また、自己共役作用素  $A, B$  に対して、 $A - B \geq 0$  によって、作用素順序  $A \geq B$  が自然に導入されます。 $\mathbb{R}^+$  上で定義された連続関数  $f$  による functional calculus がこの順序を保存する、すなわち

$$A \geq B \geq 0 \implies f(A) \geq f(B)$$

のとき、 $f$  を作用素単調といいます。冪関数については、次の重要な事実が知られています。

$t \rightarrow t^\alpha$  は、 $\alpha \in [0, 1]$  のときのみ、作用素単調である。

通常、これは Löwner-Heinz inequality と呼ばれています。以下 (LH) で表わします。[29], [25], [32] 前回も述べましたが、(LH) は同値なノルム不等式を持っています。see [12], [22] 代表的なものが、次の Araki-Cordes 不等式 (AC) です：

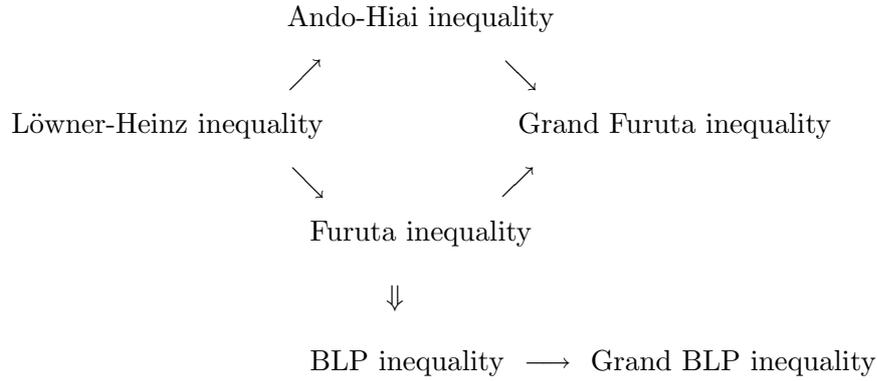
$$(AC) \quad \|B^t A^t B^t\| \leq \|BAB\|^t \text{ for } 0 \leq t \leq 1.$$

(AC) は、次のようにも変形できます：

$$(AC-1) \quad \|B^t A^t B^t\| \geq \|BAB\|^t \text{ for } t \geq 1.$$

$$(AC-2) \quad \|A^t B^t\| \leq \|AB\|^t \text{ for } 0 \leq t \leq 1.$$

本稿では、norm 不等式の方から、Löwner-Heinz 不等式の変身を見ていきたいと思ひます。そのためロードマップをここに記しておきたいと思ひます。



## 2 作用素幾何平均

Kubo-Ando [28] による作用素平均の理論によって、非負作用素単調関数と作用素平均の間には、アフィン-同型が

$$A \sigma B = A^{\frac{1}{2}} f(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}) A^{\frac{1}{2}} \quad \text{for } A > 0, B \geq 0$$

によって与えられます。特に、

$$f(x) = 1 \sigma x$$

は作用素平均  $\sigma$  の表現関数と呼ばれています。なお、作用素平均は、次の3条件を満たす2項演算を言ひます：

$$\text{Monotonicity: } A \leq C, B \leq D \Rightarrow A \sigma B \leq C \sigma D$$

$$\text{Upper semi-continuity: } A_n \downarrow A, B_n \downarrow B \Rightarrow A_n \sigma B_n \downarrow A \sigma B$$

$$\text{Transformer inequality: } T^*(A \sigma B)T \leq (T^*AT) \sigma (T^*BT) \text{ for all } T$$

$$(\text{Normalization: } 1 \sigma 1)$$

さて、(LH) より、 $\alpha \in [0, 1]$  に対して、 $\alpha$ -幾何平均  $\#_\alpha$  が次のような形で定義されます：

$$A \#_\alpha B = A^{\frac{1}{2}} (A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}})^\alpha A^{\frac{1}{2}} \quad \text{for } A > 0, B \geq 0,$$

cf. [33], [34], [1]。このように定義すると、複雑そうに見えますが、 $A$  と  $B$  が交換可能であれば、数の場合と同じように、

$$A \#_\alpha B = A^{1-\alpha} B^\alpha$$

特に、 $\alpha = \frac{1}{2}$  の場合は、

$$A \# B = \sqrt{AB}$$

となります。

なお、歴史的には、上記のようにすんなりと  $\alpha$ -幾何平均が導入されたのではなく、まず幾何平均  $\#$  が作用素行列を使って定義されました： $A, B \geq 0$  に対して、

$$A \# B = \max\{X \geq 0; \begin{pmatrix} A & X \\ X & B \end{pmatrix} \geq 0\}$$

ここで、 $A$  が invertible であるとすると、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & X \\ X & B \end{pmatrix} \geq 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & A^{-\frac{1}{2}}XA^{-\frac{1}{2}} \\ A^{-\frac{1}{2}}XA^{-\frac{1}{2}} & A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}} \geq (A^{-\frac{1}{2}}XA^{-\frac{1}{2}})^2 \\ &\Rightarrow (A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \geq A^{-\frac{1}{2}}XA^{-\frac{1}{2}} \\ &\Leftrightarrow A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}} \geq X \end{aligned}$$

従って、

$$A \# B = A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}$$

と、丁度  $\alpha = \frac{1}{2}$  の時に適合しています。

作用素幾何平均を使った不等式の典型的なものとして、安藤-日合不等式が挙げられます。Ando-Hiai [2] による log-majorization theorem は、次のように表されています:  $\alpha \in [0, 1]$  と正定値行列  $A, B$  に対して、

$$(A \#_{\alpha} B)^r \succ_{(\log)} A^r \#_{\alpha} B^r \quad (r \geq 1).$$

が成り立つ。ところが実際に証明されているのは、次の作用素不等式

$$A \#_{\alpha} B \leq 1 \implies A^r \#_{\alpha} B^r \leq 1 \quad \text{for } r \geq 1$$

で、Ando-Hiai inequality (AH) と呼ばれています。（証明は前号に記載しています。）

### 3 古田不等式

作用素幾何平均を使うことにより、より深い分析ができる例として、古田不等式を挙げるができると思います。古田不等式は、次のようなものですが (LH) の見事な一般化であります。

#### Furuta Inequality (FI)

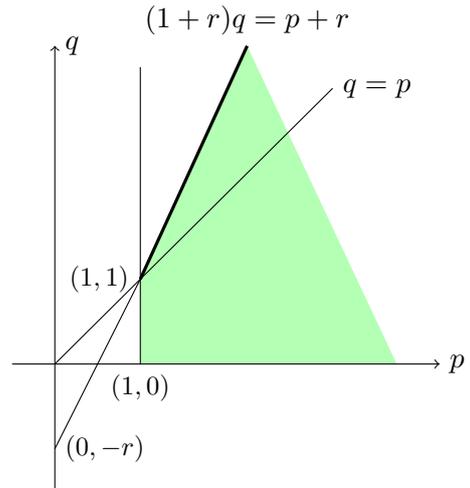
If  $A \geq B \geq 0$ , then for each  $r \geq 0$ ,

$$(i) \quad (B^{\frac{r}{2}}A^pB^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} \geq (B^{\frac{r}{2}}B^pB^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}$$

and

$$(ii) \quad (A^{\frac{r}{2}}B^pA^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} \geq (A^{\frac{r}{2}}A^pA^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}$$

hold for  $p \geq 0$  and  $q \geq 1$  with  $(1+r)q \geq p+r$ .



Furuta inequality に関する文献は、[20], [21], [10], [11], [36], [16] など多岐にわたります。

(FI) は、付帯条件において等号成立のときが最も重要で、それを  $\alpha$ -geometric mean を用いてそれを表すと次のような形にまとめられます：

If  $A \geq B \geq 0$ , then for each  $r \geq 0$

$$A^{-r} \#_{\frac{1+r}{p+r}} B^p \leq A$$

holds for  $p \geq 1$ .

(FI) をこのように表すと、次に挙げる Kamei [26] よる精密化の意味が明確になります:

**Satellite of (FI) (SFI)** If  $A \geq B \geq 0$ , then for each  $r \geq 0$

$$A^{-r} \#_{\frac{1+r}{p+r}} B^p \leq B (\leq A)$$

holds for  $p \geq 1$ .

実は、もう少し弱い条件の下で (SFI) は成立します:

If  $\log A \geq \log B$  for  $A, B > 0$ , then

$$A^{-r} \#_{\frac{1+r}{p+r}} B^p \leq B$$

holds for  $p \geq 1$  and  $r \geq 0$ .

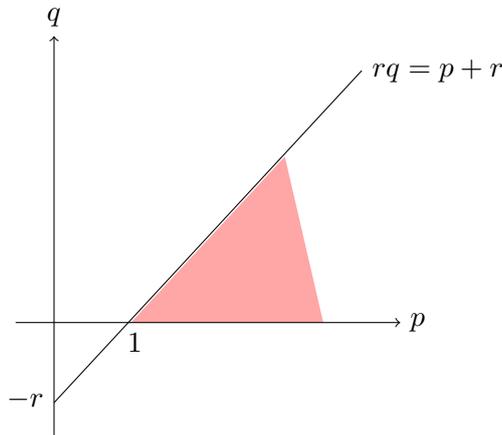
$\log A \geq \log B$  は、chaotic order と呼ばれていますが、 $\log t$  が作用素単調なので、 $A \geq B (> 0)$  より弱い順序になっています。(記号は、 $A \gg B$  と表されます。)

(SFI) を示すための道具が、次の古田型の不等式です

**(FI) for chaotic order.** If  $\log A \geq \log B$  for  $A, B > 0$ , then

$$(A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} \leq A^{\frac{p+r}{q}}$$

holds for  $p \geq 0, q \geq 1$  and  $r \geq 0$  such that  $rq \geq p + r$ .



(FI) の場合と同様に、作用素幾何平均で表せば、次のようになります。

**(CFI)** If  $A \gg B$  for  $A, B > 0$ , then

$$A^{-r} \#_{\frac{r}{p+r}} B^p \leq I$$

holds for  $p \geq 0$  and  $r \geq 0$ .

(CFI) の綺麗な証明は、Uchiyama [37] により与えられています。要点は

$$\left(1 + \frac{\log x}{n}\right)^n \rightarrow x \quad (n \rightarrow \infty)$$

の利用にあります。  $A \gg B$  に対して、

$$A_n = 1 + \frac{\log A}{n}, \quad B_n = 1 + \frac{\log B}{n}$$

とおくと、  $A_n \geq B_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) さらに、十分大なる  $n$  については、  $A_n \geq B_n > 0$  が成立します。これらに対して、(FI) を適用すると、

$$(A_n^{\frac{nr}{2}} B_n^{np} A_n^{\frac{nr}{2}})^{\frac{1+nr}{np+nr}} \geq A_n^{1+nr}$$

が得られますが、ここで

$$(A_n)^n \rightarrow A, \quad (B_n)^n \rightarrow B$$

より、

$$(A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{r}{p+r}} \geq A^r$$

が得られます。これを幾何平均を用いて表せば、

$$A^{-r} \#_{\frac{r}{p+r}} B^p \leq I$$

になります。蛇足ですが、(FI) と (CFI) は同値であることが分かります。

さて、前述の (SFI) の精密版

If  $\log A \geq \log B$  for  $A, B > 0$ , then

$$A^{-r} \#_{\frac{1+r}{p+r}} B^p \leq B$$

holds for  $p \geq 1$  and  $r \geq 0$ .

ですが、(CFI) より簡単に証明できます。その補助道具は次の2つです：

$$\text{Transposition: } A \#_{\alpha} B = B \#_{1-\alpha} A$$

$$\text{Multiplicativity: } A \#_{\alpha\beta} B = A \#_{\alpha} (A \#_{\beta} B)$$

この準備の下で、証明は以下の通り短いものです：

$$\begin{aligned} A^{-r} \#_{\frac{1+r}{p+r}} B^p &= B^p \#_{\frac{p-1}{p+r}} A^{-r} \\ &= B^p \#_{\frac{p-1}{p}} (B^p \#_{\frac{p}{p+r}} A^{-r}) && \text{by (Mp)} \\ &= B^p \#_{\frac{p-1}{p}} (A^{-r} \#_{\frac{p}{p+r}} B^p) && \text{by (Tp)} \\ &\leq B^p \#_{\frac{p-1}{p}} I && \text{by (CFI)} \\ &= I \#_{\frac{1}{p}} B^p = B. \end{aligned}$$

## 4 BLP 不等式

BLP は、Bebiano-Lemos-Providência の頭文字を取ったもので、彼らは [4] において次のノルム不等式を提示しました。

**Bebiano-Lemos-Providência inequality (BLP)**

$$\|A^{\frac{1+t}{2}} B^t A^{\frac{1+t}{2}}\| \leq \|A^{\frac{1}{2}} (A^{\frac{s}{2}} B^s A^{\frac{s}{2}})^{\frac{t}{s}} A^{\frac{1}{2}}\|$$

holds for  $A, B \geq 0$  and  $s \geq t \geq 0$ .

この一般化は [18] で議論されています。

**Theorem 4.1.** *If  $A, B > 0$ , then*

$$\|A^{\frac{1+r}{2}} B^{1+r} A^{\frac{1+r}{2}}\|^{\frac{p+s}{p(1+r)}} \leq \|A^{\frac{1}{2}} (A^{\frac{s}{2}} B^{p+s} A^{\frac{s}{2}})^{\frac{1}{p}} A^{\frac{1}{2}}\|$$

holds for  $p \geq 1$  and  $s \geq r \geq 0$ .

この定理が (BLP) の一般化になっていることは、 $B$  を  $B^{\frac{r}{1+r}}$  で置き換え、 $p = \frac{s}{r} \geq 1$  に取ると、

$$\frac{p+s}{p(1+r)} = 1, \quad \frac{r(p+s)}{1+r} = s$$

より、(BLP) が得られることより知られます。

なお、もう少し内情を言えば、次の作用素不等式を示し、その norm 不等式版として Theorem 4.1 が位置付けられます。

**Theorem 4.2.** *If  $A, B > 0$  satisfy  $A^s \#_{\frac{1}{p}} B^{p+s} \leq A^{1+s}$  for some  $p \geq 1$  and  $s \geq 0$ , then  $B^{1+s} \leq A^{1+s}$  and so  $B^{1+r} \leq A^{1+r}$  for  $0 \leq r \leq s$ .*

この不等式は、(FI) から導かれます。実際、仮定： $A^s \#_{\frac{1}{p}} B^{p+s} \leq A^{1+s}$  の両辺に両側から  $A^{-\frac{s}{2}}$  を掛けて、仮定を

$$B_1 := (A^{-\frac{s}{2}} B^{p+s} A^{-\frac{s}{2}})^{\frac{1}{p}} \leq A$$

と変形しておいて、(FI) を使います。即ち、

$$A^{1+s} \geq (A^{\frac{s}{2}} B_1^p A^{\frac{s}{2}})^{\frac{1+s}{p+s}} = B^{1+s}$$

となり、結論が得られます。

次に、(FI) と (AH) の同時拡張である Grand Furuta inequality (GFI) は、次のような形で表出されています

**Grand Furuta inequality (GFI)** *If  $A \geq B > 0$  and  $t \in [0, 1]$ , then*

$$[A^{\frac{r}{2}} (A^{-\frac{t}{2}} B^p A^{-\frac{t}{2}})^s A^{\frac{r}{2}}]^{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}} \leq A^{1-t+r}$$

holds for  $r \geq t$  and  $p, s \geq 1$ .

これを作用素平均の言葉で表せば、次のようになります。

(GFI) If  $A \geq B > 0$  and  $t \in [0, 1]$ , then

$$A^{-r+t} \#_{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}} (A^t \natural_s B^p) \leq A$$

holds for  $r \geq t$  and  $p, s \geq 1$ .

次に、(GFI) に対応する BLP 不等式の一般化を考えてみます。そのために、次の作用素不等式提起します。当然のことながら、これは Theorem 4.2 の (GFI) 版に当たっています。

**Theorem 4.3.** Suppose that  $A, B > 0$  and  $t \in [0, 1]$ . If  $A^{r-t} \natural_{\frac{1}{p}} (A^r \natural_{\frac{1}{s}} B^{(p-t)s+r}) \leq A^{1-t+r}$  for some  $p, s \geq 1$  and  $r \geq t$ , then  $B^{1-t+r} \leq A^{1-t+r}$ .

次の系は、Grand BLP inequality と呼ぶのは、自然の成り行きとして、許されるものと考えます。

**Corollary 4.4.** Suppose that  $A, B > 0$  and  $t \in [0, 1]$ . Then

$$\|A^{\frac{1-t+r}{2}} B^{1-t+r} A^{\frac{1-t+r}{2}}\|_{\frac{(p-t)s+r}{ps(1-t+r)}} \leq \|A^{\frac{1}{2}} \{A^{-\frac{t}{2}} (A^{\frac{r}{2}} B^{(p-t)s+r} A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{s}} A^{-\frac{t}{2}}\}^{\frac{1}{p}} A^{\frac{1}{2}}\|$$

holds for  $p, s \geq 1$  and  $r \geq t$ .

Theorem 4.3 及び Corollary 4.4 で、 $t = 0, s = 1$  とすると、Theorem 4.2 及び Theorem 4.1 が得られます。また、(GFI) と (AH) の関係は、

$$(GFI) \text{ for } t = 1, r = s \iff (AH)$$

であることがわかっていますので、Theorem 4.3 で、 $t = 1, s = r$  とすると、

$$\text{Let } r \geq 1 \text{ be given. If } A^{r-1} \natural_{\frac{1}{p}} (A^r \natural_{\frac{1}{r}} B^{pr}) \leq A^r \text{ for some } p \geq 1, \text{ then } B^r \leq A^r.$$

が、成立することになります。仮定の方は、

$$A^{-1} \natural_{\frac{1}{p}} (I \natural_{\frac{1}{r}} A^{-\frac{r}{2}} B^{pr} A^{-\frac{r}{2}}) \leq I$$

さらに、 $\alpha = \frac{1}{p}$ ,  $B_1 = (A^{-\frac{r}{2}} B^{pr} A^{-\frac{r}{2}})^{\frac{1}{r}}$  とおくと、仮定は、 $A^{-1} \#_{\alpha} B_1 \leq I$  と書き換えられます。一方、結論  $B^r \leq A^r$  は、 $B^r = (A^{\frac{r}{2}} B_1^r A^{\frac{r}{2}})^{\alpha}$  より、

$$(A^{\frac{r}{2}} B_1^r A^{\frac{r}{2}})^{\alpha} \leq A^r \iff A^{-\frac{r}{2}} (A^{\frac{r}{2}} B_1^r A^{\frac{r}{2}})^{\alpha} A^{-\frac{r}{2}} \leq I \iff A^{-r} \#_{\alpha} B_1^r \leq I$$

となるので、( $A$  の代わりに  $A^{-1}$  とすると) (AH) が得られます。

## 5 作用素相対エントロピー

1961 年、Nakamura and Umegaki は、

$$S(A) = -A \log A$$

によって、作用素エントロピーを導入しました。その後、作用素平均の理論の発展の下で、1989 年、J-I Fujii and Kamei [9] により、作用素相対エントロピーが

$$S(A|B) = A^{\frac{1}{2}} \log(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}) A^{\frac{1}{2}}$$

として導入されました。これが作用素エントロピーの相対化であることは、

$$S(A|I) = S(A) = -A \log A$$

より知られます。なお、作用素相対エントロピーの自然な近似として、Yanagi, Kuriyama and Furuichi [38] は、Tsallis 作用素相対エントロピー  $T_\alpha(\rho|\sigma)$  ( $\alpha \in [0, 1]$ ) を導入しました：

$$T_\alpha(\rho|\sigma) = \frac{\rho \#_\alpha \sigma - \rho}{\alpha}$$

ここで、 $\rho, \sigma$  は、正定値行列ですが、そのまま正作用素にも適用でき、次のことが成り立ちます。

$$T_\alpha(\rho|\sigma) \downarrow S(\rho|\sigma) \quad (\alpha \downarrow 0);$$

$$\frac{d(\rho \#_\alpha \sigma)}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} = S(\rho|\sigma)$$

最後に、作用素相対エントロピーに関する BLP inequality について、考えてみたいと思います。まず、(CFI) の応用として、次の不等式が得られます。

**Theorem 5.1.** *Let  $A, B > 0$  and  $r > 0$  be given. Then, if  $S(A^r|A^{p+r}) \geq S(A^r|B^{p+r})$  for some  $p > 0$ , then  $A^r \geq B^r$ .*

*Proof.* まず、 $\frac{1}{p}S(A^r|B^{p+r}) = A^{\frac{r}{2}} \log(A^{-\frac{r}{2}} B^{p+r} A^{-\frac{r}{2}})^{\frac{1}{p}} A^{\frac{r}{2}}$  なので、仮定は、次のように言い換えられます。

$$\log A \geq \log(A^{-\frac{r}{2}} B^{p+r} A^{-\frac{r}{2}})^{\frac{1}{p}}.$$

そこで、 $B_1 = (A^{-\frac{r}{2}} B^{p+r} A^{-\frac{r}{2}})^{\frac{1}{p}}$  とおくと、 $A \gg B_1$  が仮定ということになり、この結果、(CFI) より

$$I \geq A^{-r} \#_{\frac{r}{p+r}} B_1^p = A^{-r} \#_{\frac{r}{p+r}} A^{-\frac{r}{2}} B^{p+r} A^{-\frac{r}{2}},$$

が得られ、その結果、

$$A^r \geq I \#_{\frac{r}{p+r}} B^{p+r} = B^r$$

が得られ、無事証明が終わることになります。

さらに、作用素相対エントロピーに関する GBLP inequality は、次のような形で与えられます。

**Theorem 5.2.** *Let  $A, B > 0$  and  $t, r \geq 0$  be given. Then, if*

$$S(A^{t+r}|A^{p+t+r}) \geq S(A^{t+r}|A^r \natural_{\frac{1}{s}} B^{(p+t)s+r})$$

*holds for some  $p, s > 0$  with  $(p+t)s \geq t$ , then  $A^{t+r} \geq B^{t+r}$ .*

この証明の基になる (GFI) 型の作用素不等式を挙げておきます [16, Theorem 3.16]:

If  $A \gg X$  for  $A, X > 0$ , then

$$A^{\frac{(p+t)s+r}{q}} \geq [A^{\frac{r}{2}} (A^{\frac{t}{2}} X^p A^{\frac{t}{2}})^s A^{\frac{r}{2}}]^{\frac{1}{q}}$$

holds for  $p, t, r, s \geq 0$ ,  $q \geq 1$  with  $(t+r)q \geq (p+t)s+r$ .

*Proof.* まず最初に、仮定は次のように変形できます。

$$\log A \geq \log[A^{-\frac{t+r}{2}} (A^r \natural_{\frac{1}{s}} B^{(p+t)s+r}) A^{-\frac{t+r}{2}}]^{\frac{1}{q}}.$$

これより、 $q = \frac{(p+t)s+r}{t+r}$  and  $X = [A^{-\frac{t+r}{2}} (A^r \natural_{\frac{1}{s}} B^{(p+t)s+r}) A^{-\frac{t+r}{2}}]^{\frac{1}{p}}$  とすると、

$$\begin{aligned}
A^{t+r} &\geq [A^{\frac{r}{2}} (A^{\frac{t}{2}} X^p A^{\frac{t}{2}})^s A^{\frac{r}{2}}]^{\frac{t+r}{(p+t)s+r}} \\
&= [A^{\frac{r}{2}} (A^{\frac{t}{2}} [A^{-\frac{t+r}{2}} (A^r \natural_{\frac{1}{s}} B^{(p+t)s+r}) A^{-\frac{t+r}{2}}] A^{\frac{t}{2}})^s A^{\frac{r}{2}}]^{\frac{t+r}{(p+t)s+r}} \\
&= [A^{\frac{r}{2}} (A^{-\frac{r}{2}} (A^r \natural_{\frac{1}{s}} B^{(p+t)s+r}) A^{-\frac{r}{2}})^s A^{\frac{r}{2}}]^{\frac{t+r}{(p+t)s+r}} \\
&= [A^{\frac{r}{2}} (A^{-\frac{r}{2}} B^{(p+t)s+r} A^{-\frac{r}{2}} A^{\frac{r}{2}})]^{\frac{t+r}{(p+t)s+r}} \\
&= B^{t+r},
\end{aligned}$$

によって、証明が完了します。

## 参考文献

- [1] T. ANDO, *Topics on Operator Inequalities*, Lecture Note, Hokkaido University, Sapporo, 1978.
- [2] T. ANDO and F. HIAI, *Log majorization and complementary Golden-Thompson type inequalities*, Linear Algebra Appl., **197**, **198** (1994), 113–131.
- [3] H. ARAKI, *On an inequality of Lieb and Thirring*, Let. Math. Phys., **19** (1990), 167–170.
- [4] N. BEBIANO, R. LEMOS and J. PROVIDÊNCIA, *Inequalities for quantum relative entropy*, Linear Algebra Appl., **401** (2005), 159–172.
- [5] G. CORACH, H. PORTA and L. RECHT, *An operator inequality*, Linear Algebra Appl., **142** (1990), 153–159.
- [6] G. CORACH, H. PORTA and L. RECHT, *Convexity of the geodesic distance on spaces of positive operators*, Illinois J. Math., **38** (1994), 87–94.
- [7] J. FUJII, M. FUJII, T. FURUTA and R. NAKAMOTO, *Norm inequalities related to McIntosh type inequality*, Nihonkai Math. J., **118** (1993), 827–830.
- [8] J. FUJII, M. FUJII, T. FURUTA and R. NAKAMOTO, *Norm inequalities equivalent to Heinz inequality*, Proc. Amer. Math. Soc., **3** (1992), 67–72.
- [9] J. FUJII and E. KAMEI, *Relative operator entropy in noncommutative information theory*, Math. Japon., **34** (1989), 341–348.
- [10] M. FUJII, *Furuta's inequality and its mean theoretic approach*, J. Operator Theory, **23** (1990), 67–72.
- [11] M. FUJII, *Furuta inequality and its related topics*, Ann. Funct. Anal., **1** (2010), 28–45.
- [12] M. FUJII and T. FURUTA, *Löwner-Heinz, Cordes and Heinz-Kato inequalities*, Math. Japon., **38** (1993), 73–78.
- [13] M. FUJII, T. FURUTA and R. NAKAMOTO, *Norm inequalities in the Corach-Porta-Recht theory and operator means*, Illinois J. Math., **40** (1996), 527–534.
- [14] M. FUJII, M. ITO, E. KAMEI and A. MATSUMOTO, *Operator inequalities related to Ando-Hiai inequality*, Sci. Math. Japon., **70** (2009), 229–232.
- [15] M. FUJII and E. KAMEI, *Mean theoretic approach to the grand Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc., **124** (1996), 2751–2756.

- [16] M. FUJII, J. MIĆIĆ HOT, J. PEČARIĆ and Y. SEO, *Recent Developments of Mond-Pečarić Method in Operator Inequalities*, Element, Zagreb, Monographs in Inequalities **4**, 2012.
- [17] M. FUJII and E. KAMEI, *Ando-Hiai inequality and Furuta inequality*, Linear Algebra Appl., **416** (2006), 541–545.
- [18] M. FUJII, R. NAKAMOTO AND M. TOMINAGA, *Generalized Bebiano-Lemos-Providência inequalities and their reverses*, Linear Algebra Appl., **426** (2007), 33–39.
- [19] M. FUJII AND Y. SEO, *reverse inequalities of Cordes and Löwner-Heinz inequalities*, Nohonkai Math. J., **16** (2005), 145–154.
- [20] T. FURUTA,  *$A \geq B \geq 0$  assures  $(B^r A^p B^r)^{1/q} \geq B^{(p+2r)/q}$  for  $r \geq 0, p \geq 0, q \geq 1$  with  $(1+2r)q \geq p+2r$* , Proc. Amer. Math. Soc. **101** (1987), 85–88.
- [21] T. FURUTA, *Elementary proof of an order preserving inequality*, Proc. Japan Acad. **65** (1989), 126.
- [22] T. FURUTA, *Norm inequalities equivalent to Löwner-Heinz theorem*, Rev. Math. Phys., **1** (1989), 135–137.
- [23] T. FURUTA, *Extension of the Furuta inequality and Ando-Hiai log-majorization*, Linear Algebra Appl., **219** (1995), 139–155.
- [24] F. HANSEN, *An operator inequality*, Math. Ann., **246** (1980), 249–250.
- [25] E. HEINZ, *Beitrage zur Störungstheorie der Spectral-zegung*, Math. Ann., **123** (1951), 415–438.
- [26] E. KAMEI, *A satellite to Furuta’s inequality*, Math. Japon. **33** (1988), 883–886.
- [27] M. KIAN and Y. SEO, *Norm inequalities related to the matrix geometric mean of negative power*, Sci. Math. Japon., Online, 2018–7.
- [28] F. KUBO and T. ANDO, *Means of positive linear operators*, Math. Ann., **246** (1980), 205–224.
- [29] K. LÖWNER, *Über monotone Matrix function*, Math. Z., **38** (1934), 177–216.
- [30] A. MCINTOSH, *Heinz inequalities and perturbation of spectral families*, Macquarie Math. Reports, 1979.
- [31] M. NAKAMURA and H. UMEGAKI, *A note on the entropy for operator algebras*, Proc. Japan Acad., **37** (1961), 149–154.
- [32] G. K. PEDERSEN, *Some operator monotone functions*, Proc. Amer. Math. Soc., **36**(1972), 309–310.
- [33] G. K. PEDERSEN and M. TAKESAKI, *The operator equation  $THT = K$* , Proc. Amer. Math. Soc., **36**(1972), 311–312.
- [34] W. PUSZ and S. L. WORONOWICZ, *Functional calculus for sesquilinear forms and the purification map*, Rep. Math. Phys., **8** (1975), 159–170.
- [35] Y. SEO, *Matrix trace inequalities related to the Tsallis relative entropy of negative order*, J. Math. Anal. Appl., **472** (2019), 1499–1508.
- [36] K. TANAHASHI, *Best possibility of the Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc., **124** (1996), 141–146.
- [37] M. UCHIYAMA, *Some exponential operator inequalities*, Math. Inequal. Appl., **2** (1999), 469–471.
- [38] K. YANAGI, K. KURIYAMA, S. FURUICHI, *Generalized Shannon inequalities based on Tsallis relative operator entropy*, Linear Algebra Appl., **394** (2005) 109–118.