一般社団法人
国際数理科学協会会報

No.104/2017.10

編集委員： 藤井淳一（委員長）

目次

国際数理科学協会 2017 年度年会報告

年会担当理事 濵田 悦生

国際数理科学協会 2017 年度年会の各分科会が、以下の内容で開催されましたのでご報告いたします。

「確率モデルと最適化」分科会

代表者：菊田健作（兵庫県立大学）
世話役：北條仁志（大阪府立大学）

日本オペレーションズ・リサーチ学会 研究部会「不確実性環境下の意思決定モデリング」（主査 北條仁志 (大阪府立大学)，幹事 中西真悟 (大阪工業大学)）との共催

日時：2017 年 8 月 25 日（金）13:15–17:30

場所：大阪工業大学梅田キャンパス 204 セミナー室

プログラム

13:15–14:10 **井上 真二**（関西大学）

『On Bivariate Software Reliability Assessment Technologies』

概要：ソフトウェアの信頼性を定量的に計測・評価するためのソフトウェア信頼性モデルの多くは，テスト時間のみに依存したソフトウェア故障発生現象に基づいた信頼度成長過程を記述している．本講演では，信頼度成長要因として，従来のテスト時間要因に加え，テスト網羅度などのテスト労力要因に依存したソフトウェア信頼度成長現象を記述する２変量ソフトウェア信頼性モデルについて，２つの数理モデルとそれらの実データに対する適合性評価結果を述べる．

14:15–15:10 **吉冨 康成**（京都府立大学）

『確率的ジョブショップスケジューリング問題の近似解法』

概要：(1) 不確定環境型遺伝的アルゴリズム (GAUCE)、(2)GAUCE とモンテカルロ法を組み合わせたアルゴリズム、(3) 粒子群最適化に GA の機能を援用し、モンテカルロ法を組み合わせたアルゴリズム、と進歩してきた、確率的ジョブショップスケジューリング問題の近似解法についての著者らの研究をレビューする。

15:25–16:20 **中出 康一**（名古屋工業大学）

『lead time quotation model の解析』

概要：生産者は，顧客に対し現時点での生産指示量をもとに納品に必要なリードタイムを示す．顧客は自身の待ち時間の効用をもとに実際に購入するかどうかを決める．適切なリードタイムについて，生産時間が指数分布の場合の解析とともに，一般分布に従う場合について Mn/G/1 の解析結果を用いた数値実験を行う．その際必要となる残余時間分布に関する計算法について述べる．

16:25–17:20 **花田 良子**（関西大学），**仲川 勇二**（関西大学）

『多目的最適化問題のパレートフロンティア探索法と金融工学等への応用』

概要：多目的非線形ナップザック（分離形離散最適化）問題の全ての有効解（パレートフロンティア）を探索するユニークな列挙解法について報告する。この列挙法は改良代理制約法（Management Science 2014）に基づいた方法で、対象とする領域の実行可能解を全て列挙することで有効解の部分集合を求める。目的関数空間上で探索領域を再帰的に分割しつつ、その領域に含まれる有効解を全列挙することで、最終的に全ての有効解が列挙される。他の代表的解法として、IBMCPLEX を用いた Sayin 等（Managemet Science 2005）と動的計画法を用いた Bazgan 等（Computer & Operations Research 2009）がある。これらの解法との比較実験の結果とともに、金融工学等への応用について報告する。

「代数, 論理, 幾何と情報科学研究集会」

ALGI (Algebra, Logic and Geometry in Informatics) ALGI28 プログラム（ALGI 2017）

日時：2017 年 8 月 28 日（月）午後〜8 月 29 日

場所：鹿児島大学 郡元キャンパス 理学部 1 号館 101 講義室

幹事：西澤弘毅（神奈川大学）, 津曲紀宏（崇城大学）

世話人：古澤仁（鹿児島大学 大学院理工学研究科（理学系）

８月２８日（月）

14:00 〜 14:30　**星野 直彦**（京都大学 数理解析研究所）

演題：coproducts in traced monoidal categories

梗概：コンパクト閉圏が直和を持つと双直積を持つということが Houston により示されている。ここではこれの部分的な一般化であるトレース付きモノイダル圏が直和を持ち、モノイダル積が直和に対して分配するならそのトレース付きモノイダル圏は双直積を持つという結果を紹介する。

14:30 〜 15:00　**河野 友亮**（東京工業大学）

演題：Dynamic quantum logic における量化の種類

梗概： Dynamic quantum logic では、射影に関係した様相記号の量化として、通常の様相記号を使っていた。しかし、量子力学のある種の概念を表すには、別の量化が必要である。今回の発表では、この新しい量化の様相記号を導入し、新しい論理を作る。

15:00 〜 15:15　休憩

15:15 〜 15:45　**田中 康平**（信州大学 経法学部）

演題：Combinatorial motion planning for finite spaces

梗概：本講演では Farber によって導入された不変量 Topological complexity とロボットアームのモーションプランニングの関係を解説したのち，その組合せ論的なアプローチを考える。

15:45 〜 16:15　**西牟田 祐樹**（慶應義塾大学）

演題：一般化乗法的論理結合子の証明網

梗概：本発表では (Danos and Regnier, 1989) が導入した一般化乗法的論理結合子のグラフ論的な特徴づけについて述べる。2 項の乗法的論理結合子については (Girard, 1989) が証明網の理論によってグラフ論的な証明の特徴づけを与えていた。しかし、一般化乗法的論理結合子については (Danos and Regnier, 1989) は証明とグラフの対応は成り立たなくなると考えた。そこで本発表では新しいスイッチングの概念を導入することによって一般化乗法的論理結合子についても証明とグラフの対応が成り立ち、証明をグラフ論的に特徴づけられるということを示す。

16:15 〜 16:3　休憩

16:30 〜 17:00　**中村 誠希**（東京工業大学 情報理工学院）

演題：関係 Kleene 代数における atomic negation について

梗概：関係 Kleene 代数の等式理論に negation を加えると決定不可能になるが、atomic negation（negation の適用を変数のみにした制限）であれば決定可能のままである。本発表では、関係積と逆関係をもつ関係 Kleene 代数（これは決定可能）については、 atomic negation を加えるだけでも決定不可能になることを示す。

17:00 〜 17:30　**河村 彰星**（九州大学）

演題：汎函数の多項式時間限定について

梗概：「二型」の対象、すなわち例えば文字列函数を入出力とする函数（汎函数）についても、「一型」の対象（文字列を入出力とする函数など）と似た意味で計算量を考えることができ、実数計算などに応用されている。このような二型計算の多項式時間限定は、一型多項式計算の閉包性質に着目してそれを自然に拡張したり、神託機械の時間制限に「二階多項式」を用いたりすることで定式化されるが、一型の場合に成立つ幾つかの良い性質、例えば自己構成可能性が、そのままでは成立たない。本研究では、通常の（一階）多項式と「入力長更新」の概念を用いて、二型函数の「強」多項式時間計算可能性という自己構成可能な時間限定を定義し、その性質を調べる。従来の多項式時間汎函数に比べると、その名の通り真に強い限定であるが、一定の状況下では一致する。本講演は国際会議 FSCD 2017 で発表するＦ・シュタインベルク氏との共同研究に基づく。

８月２９日（火）

09:40 〜 10:00　**西村 進**（京都大学 大学院理学研究科）

演題：Schlegel 図と分散プロトコル最適化

梗概：分散システムの組合せトポロジー論において、immediate snapshot は複体の色付き標準細分に対応しており、分散プロトコルを実現するための中核的な構成要素となっている。 本発表では、Borowsky と Gafni による immediate snapshot の実装を再編し、これが Schlegel 図を用いた複体の細分の繰り返しに対応することをみる。また、この再編によって immediate snapshot が細分の繰り返しとなることから、分散プロトコルの機械的な最適化が可能であることを示す。

10:00 〜 10:30　**鴨 浩靖**（奈良女子大学）

演題：三角形と Lagrange の未定乗数法と Conway's extraversion

10:30 〜 11:00　**長谷川 真人**（京都大学 数理解析研究所）

演題：Free Traces on Symmetric Monoidal Categories

「統計的推測と統計ファイナンス」分科会研究集会

世話人：地道 正行 (関西学院大学 商学部)
連絡先：濵田 悦生 (大阪大学 大学院基礎工学研究科)

日時: 2017 年 8 月 19 日 (土) 10:00–17:00
場所: 大阪府立大学 中百舌鳥キャンパス A14 棟 3 階 A14–321 教室

プログラム

午前の部

10:00–10:30 **岩貞 侑那** (大阪府立大学 大学院理学系研究科), **林 利治** (大阪府立大学 大学院工学研究科)
『ニューラルネットワークにおける重みの学習と汎化誤差』

10:30–11:00 **道家 悠太** (大阪府立大学 大学院工学研究科), **林 利治** (大阪府立大学 大学院工学研究科)
『関数型の説明変数を伴う混合効果モデルのパラメータ推定』

11:00–11:30 **川崎 悠介** (大阪府立大学 大学院工学研究科), **林 利治** (大阪府立大学 大学院工学研究科)
『先読みを利用した粒子フィルタによる状態推定』

11:30–12:10 **倉田 澄人** (大阪大学 大学院基礎工学研究科), **濵田 悦生** (大阪大学 大学院基礎工学研究科)
『ロバスト性を持ったモデル評価規準族の応用について』

因果関係を表現した統計モデルの選択手法について、異常値が混入しているときの精度について比較・検討を行った。特に、桁間違いのようなミスで本来の因果に乗っていない値が混入した場合、多くの手法は選択能力を失いがちであるが、ロバストなダイバージェンスに基づいた規準族 (Kurata and Hamada (2017)) は精度を低下させにくいという例を報告した。

午後の部

13:30–14:10 **田辺 竜ノ介** (大阪大学 大学院基礎工学研究科), **加茂 憲一** (札幌医科大医療人育成センター), **伊森 晋平** (大阪大学 大学院基礎工学研究科), **福井 敬祐** (大阪国際がんセンター 治験臨床研究管理室兼がん対策センター)
『一般化線形モデルにおける二項分布のパラメータ n の推定』

二項分布 $B(n,p)$ におけるパラメータ n の推定問題は頻度論的手法では推定値が安定しにくいという欠点がある。一方ベイズ統計の立場では安定した推定が可能と知られている。本発表では地域ごとの癌罹患者数の推定問題を混合効果のある二項分布の n 推定問題ととらえ、階層ベイズモデルを用いて推定量を構成し、シミュレーションと実データ解析から性能を確認した。結果、標本数が各地域一つの場合、事後分布が存在しないが、それより多いケースでは適切に信用区間を構成できることが確認できた。

14:10–14:50 **濵田 悦生** (大阪大学 大学院基礎工学研究科)
"On a misuse of sufficient statistics in the exponential family"

連続型確率分布に基づいて変換された指数型分布族における k 次元十分統計量に関して、その十分統計量が k 次元指数型分布族に従うはずであるとする誤用があることを指摘した。

14:50–15:30 **地道 正行** (関西学院大学 商学部) , **宮本 大輔** (奈良先端科学技術大学院大学 情報科学研究科), **阪 智香** (関西学院大学 商学部), **永田 修一** (関西学院大学 商学部)
『Spark + R 環境を利用した財務ビッグデータ解析』

15:30–15:40 休憩

15:40–16:30 **林 利治** (大阪府立大学 大学院工学研究科)
『 Nested case–control データに基づく Cox 回帰モデルのパラメータ推定』

16:30–17:00 総合討論

＊寄稿

Lie super 代数の拡張と微分方程式の対称性

会沢 成彦 (大阪府立大学 理学系研究科 物理科学専攻)

1　はじめに

大学に入ったときに, とにもかくにもマスターしなきゃならないな, と思ったのは与えられた微分方程式の解を見つける方法でした. というのは, 私は物理学科に入ってたので 1 個の質点の運動にせよ, 剛体の運動にせよ, 電気や磁気が関与する現象にせよなんでもかんでも微分方程式のかたちになり, それを解くことによりいろいろなことがわかるからです. しかし, 多くの場合は解を多項式や三角関数などを用いて具体的に書き下すことはできず, 近似解や数値解で満足しなければならないのでした. 近似解はともかく, 数値解というのはどうも好きになれませんでした. たしかに物理現象の理解には問題ないのですが, 力技というか, 理論的美しさからは程遠いのが理由だったのでしょう.

学年が進んで量子力学を学んだ時に, 微分方程式を扱うのに代数的方法があるというのを学びました. 代数的というのは専門用語でいうと, Lie 代数という非可換な代数の表現論を用いるという意味です. これにはエキサイトしました. 微分方程式を解くのだから積分するのは必須だと思っているのに, この方法では積分は一切でてこないのです. また, Lie 代数というのは回転や平行移動のような連続変換を考えたときの無限小変換に対応しているということ, 有限の変換は Lie 群になること, さらには, Lie 群や Lie 代数は量子物理には非常に有用な概念であることを知りました.

Lie 群の創始者であるノルウェーの数学者 Sophus Lie (1842-1899) 自身は, 連続変換を偏微分方程式に応用して, Galois の代数方程式に対する理論を偏微分方程式の場合に拡張したいと思っていました. n 次代数方程式は n 個の解を持ちますから, Galois は解 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の置換を考えたわけです. 一方, 偏微分方程式の場合, 一般解は任意関数を含んでいますから, 解を並べておいて置換するというわけにはいきません. ましてや偏微分方程式の一般解なんてそうやすやす見つけられるものではありません. Lie が考えたのは微分方程式の与えられたひとつの解を別な解に変換する操作なのです. どんなものでもいいから解をひとつ見つけてしまえば, それを変換してより実用的な解にたどり着ける, つまりこれは微分方程式の解法になっているのです. 実際, この方法は宇宙物理学などでよく使われており, 大きな成果をあげています.

もちろん, どのような変換でもある解を別な解に変換してくれるわけではありませんから, 微分方程式が与えらたときにある解から別な解を作る変換を求めよ, という問題を解かなければなりません. ある解から別な解を作る変換の集合をその微分方程式の**対称性**と呼んでいます. 微分方程式の対称性に関する研究は Lie に始まり, 今日まで続いています.

ごく最近, 微分方程式の対称性に関して面白い進展がありましたので, それを本稿で紹介したいと思います. 微分方程式の対称性は Lie 群, あるいはそれを拡張した Lie super 群で与えられるのが一般的なのですが, Lie super 群をさらに拡張した $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 次数付 Lie super 群が微分方程式の対称性として現れるということが明らかになったのです. 微分方程式の対称性という文脈でこのような群が登場するのは初めてのことと思います.

なお, 専門分野が異なる多くの方にも読んでいただきたいので数学的に厳密な書き方はせず, 初等的なこともなるべく説明するようにしています.

2 簡単な例

まずは簡単な例を使って微分方程式の対称性と Lie 群の関係を見てみましょう．実際には無限小の変換を考えれば十分なので, Lie 群ではなく Lie 代数の話をすることになります．微分方程式

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = 0 \tag{1}$$

の一般解は直線

$$y(x) = \alpha x + \beta \tag{2}$$

で与えられます．α と β の値によりいろいろな直線 (解) になりますが, あるひとつの解から別な解を作る変換を見つけたいわけです．そのような変換はひとつとは限らないでしょうが, すぐに気がつくのは ϵ_i を定数として

$$x \;\rightarrow\; x_1 = x + \epsilon_1, \tag{3}$$

$$x \;\rightarrow\; x_2 = e^{\epsilon_2}x \tag{4}$$

という変換は解 (2) をそれぞれ次のような解に変換します：

$$y(x_1) \;=\; \alpha x_1 + \beta - \alpha\epsilon_1, \tag{5}$$

$$y(x_2) \;=\; e^{-\epsilon_2}\alpha x_2 + \beta. \tag{6}$$

これらの変換の特徴は新しい変数を用いて微分方程式 (1) を書き直してもその形が変わらないことです:

$$\frac{d^2y(x_1)}{dx_1^2} = 0, \qquad \frac{d^2y(x_2)}{dx_2^2} = 0$$

一般に, x と y を独立変数とみなしたとき, $(x, y) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y})$ という変換が与えられた微分方程式の形を変えなければ, その変換によりある解が別の解に移されることがわかります．

もうひとつの大切なことはこれらの変換と Lie 代数の関係です．いま (3)(4) で $|\epsilon_i| \ll 1$ として ϵ_i の 1 次までを考えると

$$x_1 \;\approx\; x + \epsilon_1 X_1 x, \tag{7}$$

$$x_2 \;\approx\; x + \epsilon_2 X_2 x, \tag{8}$$

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} \tag{9}$$

とかくことができます．(7), (8) の第 2 項は今考えている変換が微分演算子 X_i により生成されること示しています．ふたつの演算子 A, B に対して**交換子** $[A, B]$ を

$$[A, B] := AB - BA \tag{10}$$

で定義します．すると

$$[X_1, X_2] = X_1 \tag{11}$$

という関係が得られます．つまり, 微分方程式の対称性を与える演算子の集合 $\{X_1, X_2\}$ は交換子に関して閉じた集合になっています．このように交換子に関して閉じた集合を **Lie 代数**と呼びます．一般に, 与えられた微分方程式の形を変えないような変換の集合は Lie 代数により生成されることが知られています．

3 Lévy-Leblond 方程式

Lévy-Leblond 方程式という 1 階の線型微分方程式の対称性を調べようと思います．これは Jean-Marc Lévy-Leblond という人が 1967 年に導入した電子の方程式です．電子の方程式というと Dirac 方程式を思い出す人もいると思いますが, Dirac の方程式は Einstein の相対性理論を考慮に入れて作られたものです．それに対して Lévy-Leblond 方程式は相対性理論を考慮しない場合に電子の方程式はどうあるべきかという考察から導入されたものです.

独立変数は時間 t と空間座標 x_1, x_2, x_2 で, これらをまとめて $x = (t, x_1, x_2, x_3)$ とかくことにします. 従属変数は 4 成分のベクトル値関数で $\psi(x) = {}^t(\psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x))$ とおきましょう．このとき Lévy-Leblond 方程式は次のようになります:

$$\Omega\psi(x) = 0, \quad \Omega = -2i\alpha\frac{\partial}{\partial t} + i\sum_{j=1}^{3}\gamma_j\frac{\partial}{\partial x_j} + 2m\beta \tag{12}$$

ここで $\gamma_0, \ldots, \gamma_3, \alpha, \beta$ は 4×4 行列で γ_μ は次の関係式を満たすものとします:

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} := \gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}, \quad (g_{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(+, -, -, -). \tag{13}$$

$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\}$ は γ_μ と γ_ν の**反交換子**と呼ばれています．α, β は γ_μ から作られる行列

$$\alpha = \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_4), \quad \beta = \frac{1}{2}(\gamma_0 - \gamma_4), \quad \gamma_4 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \tag{14}$$

m は定数で電子の質量と関係しています．演算子 Ω を 2 乗すると

$$\Omega^2 = \mathbf{1}_4\left(-4im\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right) \tag{15}$$

となり $\Omega^2\psi(x) = 0$ は量子力学の基本方程式である Schrödinger 方程式になります．これは偶然ではなく, Lévy-Leblond はそうなるように彼の方程式を作ったのです.

4 Lévy-Leblod 方程式の超対称性

では, Lévy-Leblod 方程式の対称性の議論に入りましょう．ある解を別な解にする変換を探せばよいのでした．Lévy-Leblod 方程式は線型ですから, 4×4 行列演算子 $\mathcal{A}$ が

$$[\Omega, \mathcal{A}] = \Lambda_{\mathcal{A}}(x)\Omega, \qquad \text{または} \qquad \{\Omega, \mathcal{A}\} = \Gamma_{\mathcal{A}}(x)\Omega \tag{16}$$

を満たせば, $\mathcal{A}$ はある解 $\psi(x)$ を別な解 $\mathcal{A}\psi(x)$ に変換します．ただし, $\Lambda_{\mathcal{A}}(x), \Gamma_{\mathcal{A}}(x)$ は 4×4 行列でその成分には x についての微分演算子は含まれないものとします．条件 (16) は node[circle,draw,fill=white,inner sep=1pt]s2 で議論した方程式の形を変えない変換よりはゆるい条件になっていることに注意してください.

条件 (16) を満たす 1 階の微分演算子を探すことにしましょう．と言っても, そのような演算子の完全なリストを作るのは容易ではないので, 見つけたものだけをリストアップすることにします．(16) のうち

交換子で与えらえる条件を満たすものには

$$
\begin{aligned}
P_j &= \partial_{x_j}, \qquad G_j = t\partial_{x_j} + 2imx_j + \alpha\gamma_j, \qquad M = 2im,\\
H &= \partial_t, \qquad D = 2t\partial_t + x_j\partial_{x_j} + 2 - \frac{1}{2}\gamma_0\gamma_4,\\
K &= tD - t^2\partial_t + imx_jx_j + \alpha x_j\gamma_j,\\
J_{jk} &= x_j\partial_{x_k} - x_k\partial_{x_j} - \frac{1}{2}\gamma_j\gamma_k,\\
\tilde{X}_j &= -\epsilon_{jkn}\Big([\alpha,\gamma_k]\partial_{x_n} + \frac{im}{2}[\gamma_k,\gamma_n]\Big)
\end{aligned}
\tag{17}
$$

があります. ここで添字 j,k,n の値は 1 から 3 であり, 4 次の単位行列 $\mathbf{1}_4$ は省略しています (以後もそうします). また, $x_j\gamma_j := \sum_{j=1}^{3} x_j\gamma_j$ のように同じ添え字が 2 度現れるときは和をとるという記法を採用しています. $\Lambda_{\mathcal{A}}(x)$ は $\Lambda_D = 1$, $\Lambda_K = t$ を除いてすべて零行列です.

一方, (16) のうち反交換子で与えらえる条件を満たすものには

$$
\begin{aligned}
Q &= \frac{1}{\sqrt{-im}}\alpha\partial_t + \sqrt{-im}\beta,\\
S &= \frac{1}{\sqrt{-im}}\alpha\Big(t\partial_t + x_j\partial_{x_j} + \frac{3}{2}\Big) + \sqrt{-im}(t\beta + x_j\gamma_j),\\
X_j &= \frac{1}{\sqrt{-im}}\alpha\partial_{x_j} + \sqrt{-im}\gamma_j, \quad j = 1,2,3
\end{aligned}
\tag{18}
$$

があります. 零行列でない $\Gamma_{\mathcal{A}}(x)$ は $\Gamma_S = -\alpha/\sqrt{-im}$ のみです.

node[circle,draw,fill=white,inner sep=1pt]s2 の演算子と比べると, P_j は x_j 軸方向の平行移動 $x_j \to x_j + \epsilon$ を, P は時間の平行移動を, D は t と x_j を同時にスケールする変換を表していることがわかります. また, J_{ij} は x_i-x_j 平面における回転を, G_j は $x_j \to x_j + \epsilon t$ という変換を表しています. K は特殊共形変換と呼ばれる変換で, (17) のうち $\tilde{X}_j$ を除いたものはすべて時空における等角写像になっています. そして, (17) のうち $\tilde{X}_j$ を除いたものは交換子で閉じる, つまり Lie 代数になっていることが直接の計算で確かめられます. という具合に, ここまでは node[circle,draw,fill=white,inner sep=1pt]s2 をなぞった形で順調に議論が進みました.

$\tilde{X}_j$ は後回しにして (18) の演算子を調べてみましょう. ちょっと計算をやってみればわかりますが, これらは交換子では閉じないのです. しかし, 反交換子を用いると美しい閉じた関係式が得られます:

$$
\begin{aligned}
&\{Q,Q\} = 2H, \qquad \{S,S\} = 2K, \qquad \{X_j, X_k\} = \delta_{jk}M,\\
&\{Q,S\} = D, \qquad \{Q,X_j\} = P_j, \qquad \{S,X_j\} = G_j.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

(19) から Q は時間並進 (H) の平方根, S は特殊共形変換 (K) の平方根であることがわかります. いま

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{g}_0 &= \langle\, H,\, D,\, K,\, J_{jk},\, P_j,\, G_j,\, M \,\rangle,\\
\mathfrak{g}_1 &= \langle\, Q,\, S,\, X_j \,\rangle,
\end{aligned}
\tag{20}
$$

とおくと $\mathfrak{g}_0$ は Lie 代数になっていることはすでに述べました. つまり, 交換子で閉じているわけですがこのことを

$$
[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] \subseteq \mathfrak{g}_0 \tag{21}
$$

という記号であらわすことにします．その心は明らかでしょう．(19) は

$$\{\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1\} \subseteq \mathfrak{g}_0 \tag{22}$$

となり, 直接の計算で

$$[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1] \subseteq \mathfrak{g}_1 \tag{23}$$

が成立っていることも確かめられます．交換子と反交換子をまとめてひとつの記号 $[\![\ ,\ ]\!]$ で表すと (21)–(23) は次のようにまとめることができます:

(i) $[\![\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_b]\!] \subseteq \mathfrak{g}_{a+b\ (\mathrm{mod}2)}$

(ii) $[\![\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_b]\!] = -(-1)^{ab}[\![\mathfrak{g}_b, \mathfrak{g}_a]\!]$

(ii) は, $ab = 0$ のとき $[\![A, B]\!] = -[\![B, A]\!]$ なので $[\![\ ,\ ]\!]$ は交換子を表し, $ab = 1$ のときは反交換子を表すことを示しています．一般に, (i)(ii) を満たすものを **Lie super 代数**あるいは **$\mathbb{Z}_2$ 次数付 Lie 代数**と呼んでいます．ですから (20) の $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1$ 全体の集合は Lie super 代数になっています．以上より, 次の結論が得られました:

Lévy-Leblond 方程式の対称性は (20) の Lie super 代数で生成される．

(20) に含まれる $\langle\, H, Q\, \rangle$ は

$$\{Q, Q\} = 2H, \qquad [H, Q] = 0 \tag{24}$$

という関係を満たし**超対称代数**と呼ばれています．(24) は超対称代数のもっとも簡単な例ですが, 超対称代数が生成する対称性 (**超対称性**) は超弦理論や位相的場の理論などの素粒子物理, それに関連する数理物理におけるもっとも重要な概念のひとつになっています．

やっと結論が出たのに, いきなりそれをひっくり返すのですが (20) には $\tilde{X}_j$ が含まれていません．つまり, Lévy-Leblond 方程式の対称性は (20) の Lie super 代数より大きいのです．少し手を動かして計算してみればわかるのですが $\tilde{X}_j$ を $\mathfrak{g}_0$ に入れても, $\mathfrak{g}_1$ に入れても閉じた関係式を得ることはできません．Lévy-Leblond 方程式のより大きな対称性は Lie super 代数ではないのです．ではそれはいったい何なのかというのが問題なのですが, 節を改めて解説することにします．

5 Lévy-Leblod 方程式と $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 次数付 Lie super 代数

$\tilde{X}_j$ を含めた Lévy-Leblod 方程式の対称性は **$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 次数付 Lie super 代数**というものになっています．これは Rittenberg と Wyler による Lie super 代数の拡張のもっとも簡単な場合です．Einstein の伝記でも有名な物理学者の Abraham Pais があるとき Rittenberg に「Lie super 代数は拡張できないのか？」という問いを発したそうです．Rittenberg は Wyler とともにこの問いに真剣に取り組み, 1978 年に $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N \times \cdots \times \mathbb{Z}_N$ 次数付 Lie 代数というものを導入しました．$N \geq 2$ は自然数です．Lie super 代数は $\mathbb{Z}_2$ 次数付 Lie 代数ですから, Lie super 代数の拡張になってることは見当がつくでしょう．翌年には Scheunert がさらなる一般化を行い, 以来今日まで脈々と研究が続けられています．

といっても, 研究しているのは代数学に興味がある人ばかりで, 他分野への応用はほとんどありません．特に物理学への応用は片手で数えられるくらいしか文献がなく, 大きな成功を収めているとは言えません．今回われわれが見つけた電子の方程式である Lévy-Leblond 方程式の対称性が $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 次数付 Lie super 代数であるというのは, その意味でも大変興味深いものと思っています．

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 次数付 Lie super 代数について説明しようと思うのですが, Lie super 代数のおさらいから始めましょう．node[circle,draw,fill=white,inner sep=1pt]$s4$ で見たように, Lie super 代数は $\mathfrak{g}_0$ と $\mathfrak{g}_1$ という

集合から成っています．Lie super 代数の定義 (node[circle,draw,fill=white,inner sep=1pt]s4 (i) (ii)) にはこれらの添え字の集合 $\{0,1\}$ の積と mod 2 の足し算がでてきます．集合 $\{0,1\}$ に mod 2 の足し算を入れたものを $\mathbb{Z}_2$ というのはご存知でしょう．これが Lie super 代数が $\mathbb{Z}_2$ 次数付 Lie 代数といわれる所以です．

$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ 次数付 Lie super 代数は $\mathbb{Z}_2$ を $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$ に置き換えたものです．$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ の元は 2 次元ベクトル $\vec{a}=(a_1,a_2)$ とみなすことができ，和 $\vec{a}+\vec{b}$ は各成分について mod 2 で計算します．たとえば，$(0,1)+(1,1)=(1,0)$ となります．内積は通常通りです:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2. \tag{25}$$

$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ 次数付 Lie super 代数は 4 つの集合 $\mathfrak{g}_{(0,0)},\mathfrak{g}_{(0,1)},\mathfrak{g}_{(1,0)},\mathfrak{g}_{(1,1)}$ から成ります．そしてこれらの間に次の関係式が成立つことを要求します:

(i) $[\![\mathfrak{g}_{\vec{a}},\mathfrak{g}_{\vec{b}}]\!]\subseteq\mathfrak{g}_{\vec{a}+\vec{b}}$

(ii) $[\![\mathfrak{g}_{\vec{a}},\mathfrak{g}_{\vec{b}}]\!]=-(-1)^{\vec{a}\cdot\vec{b}}[\![\mathfrak{g}_{\vec{b}},\mathfrak{g}_{\vec{a}}]\!]$

これを交換子と反交換子を用いて具体的にかくと

$$[\mathfrak{g}_{(\vec{0,0})},\mathfrak{g}_{\vec{a}}]\subseteq\mathfrak{g}_{\vec{a}},\quad \vec{a}\in\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2 \tag{26}$$
$$\{\mathfrak{g}_{\vec{a}},\mathfrak{g}_{\vec{a}}\}\subseteq\mathfrak{g}_{(0,0)},\quad \vec{a}\in\{(0,1),(1,0)\} \tag{27}$$
$$[\mathfrak{g}_{(1,1)},\mathfrak{g}_{(1,1)}]\subseteq\mathfrak{g}_{(0,0)},\qquad [\mathfrak{g}_{(1,0)},\mathfrak{g}_{(0,1)}]\subseteq\mathfrak{g}_{(1,1)}, \tag{28}$$
$$\{\mathfrak{g}_{(1,1)},\mathfrak{g}_{(0,1)}\}\subseteq\mathfrak{g}_{(1,0)},\qquad \{\mathfrak{g}_{(1,1)},\mathfrak{g}_{(1,0)}\}\subseteq\mathfrak{g}_{(0,1)} \tag{29}$$

となります．$\mathfrak{g}_{(0,0)}$ と $\mathfrak{g}_{(0,1)}$ のつくる部分集合は Lie super 代数になっています．$\mathfrak{g}_{(0,0)}$ と $\mathfrak{g}_{(1,0)}$ のつくる部分集合もそうです．

$\tilde{X}_j$ を含めた Lévy-Leblod 方程式の対称性を探るカギは $\tilde{X}_j=\frac{1}{2}\epsilon_{jkn}[X_k,X_n]$ という関係式にあります．ここで ϵ_{jkm} は $\epsilon_{123}=1$, かつ，添え字の入れ換えに関して完全反対称な量です．Lie super 代数では X_j どうしは反交換子でしたが，それを交換子に変更する必要があるのです．それには $X_j\in\mathfrak{g}_{(1,1)},\tilde{X}_j\in\mathfrak{g}_{(0,0)}$ とすると (28) がうまくフィットするのです．また閉じた代数を得るには新しい演算子を導入する必要があります:

$$\begin{aligned}\tilde{P}_{jk} &= \{P_j,P_k\},\quad \tilde{G}_{jk}=\{G_j,G_k\},\quad W_{jk}=\{P_j,G_k\},\\ X^P_{jk} &= \{P_j,X_k\},\quad X^G_{jk}=\{G_j,X_k\}.\end{aligned} \tag{30}$$

これらの新しい演算子が Lévy-Leblond 方程式の対称性になること，すなわち (16) を満たすことは簡単に確かめられます．これまでに得られた Lévy-Leblond 方程式の対称性を与える演算子を次のようにまとめると，$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ 次数付 Lie super 代数の定義を満たすことが確かめられます．

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}_{(0,0)} &= \langle\, H,\,D,\,K,\,J_{jk},\,\tilde{X}_j,\,W_{jk},\,\tilde{P}_{jk},\,\tilde{G}_{jk}\,\rangle,\\ \mathfrak{g}_{(0,1)} &= \langle\, P_j,\,G_j\,\rangle,\\ \mathfrak{g}_{(1,0)} &= \langle\, Q,\,S,\,X^P_{jk},\,X^G_{jk}\,\rangle,\\ \mathfrak{g}_{(1,1)} &= \langle\, X_j\,\rangle.\end{aligned} \tag{31}$$

このようにして Lévy-Leblond 方程式の対称性は $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ 次数付 Lie super 代数になることが分かりました．ただし，(16) を満たすすべての演算子を求めたわけではないので，Lévy-Leblond 方程式の最大の

対称性が得られたわけではありません. しかしながら, 空間を 1 次元に簡単化した場合は (16) を満たす 1 階の微分演算子が生成する最大の代数は $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 次数付 Lie super 代数であることが示せます. 今回議論した空間 3 次元の場合は計算が煩雑になりすぎて, もっとも大きい対称性を得るには至りませんでした. この問題を解決するなにかうまい方法を考えたいものだと思っています.

6　おわりに

微分方程式の解法という観点で, 対称性, Lie 群・Lie 代数, およびその拡張について書いてきました. 専門の異なる方には, 対称性は単に方程式の解を求めるツールにすぎないという印象を与えてしまったかもしれません. 対称性に興味を持つのは, それが物理にとっても数学にとってもより本質的なものだからなのです. この点を最後にコメントしたいと思います.

われわれの住んでいるこの世界は何からできていて, この世界を司る基本法則はどのようなものなのかというのは古代から人類が興味を持ち続けてきた問題です. この問いに対する現在の解答は, 自然界の基本法則は**ゲージ原理**に基づくはずだというものです. ゲージ原理というのは自然界の基本法則はある種の Lie 群による変換のもとで不変でなければならないというものです. 実際, ゲージ原理に基づく**標準模型**と呼ばれる物理の理論は, いくつかの問題を含んでいるにせよ, 実験と良い一致を示しています.

1970 年代から自然界の基本的な対称性は Lie 群ではなく Lie super 群で与えられるというアイディア (超対称性) が真剣に検討されています. 超対称性は素粒子の数が現在知られているものの 2 倍あるはずだということを主張するのですが, 残念ながら実験的な証拠はひとつもありません. しかし, このアイディアは物理だけではなく理論の構造とかかわる複素幾何学や代数の表現論といった数学の分野にも大きなインパクトを与え, 数学の発展をも促しました. このように対称性は単なるツールではなく, 自然界の原理であるとともに新しい分野を開拓する原動力でもあるのです. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 次数付 Lie super 代数の研究も分野の垣根を越えた大きな流れになればと思います.

参考文献

[1] J.-M. Lévy-Leblond, Nonrelativistic particles and wave equations, Communications in Mathematical Physics, **6** (1967) 286.

[2] V. Rittenberg and D. Wyler, Generalized superalgebras, Nuclear Physics, **B 139** (1978) 189.

[3] V. Rittenberg and D. Wyler, Sequences of $\boldsymbol{Z}_2 \otimes \boldsymbol{Z}_2$ graded Lie algebras and superalgebras, Journal of Mathematical Physics, **19** (1978) 2193.

[4] M. Scheunert, Generalized Lie algebras, Journal of Mathematical Physics, **20** (1979) 712.

[5] H. Stephani, *Differential equations: Their solution using symmetries*, Cambridge Univ. Press (1989).

[6] W. Fushchych and R. Zhdanov, *Symmetries and Exact Solutions of Nonlinear Dirac Equations*, Mathematical Ukraina Publisher (1997).

[7] N. Aizawa, Z. Kuznetsova, H. Tanaka and F. Toppan, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-graded Lie symmetries of the Lévy-Leblond equations, Progress of Theoretical and Experimental Physics, **2016** (2016) 123A01.

[8] N. Aizawa, Z. Kuznetsova, H. Tanaka and F. Toppan, Generalized supersymmetry and Lévy-Leblond equation, arXiv:1609.08760 [math-ph].